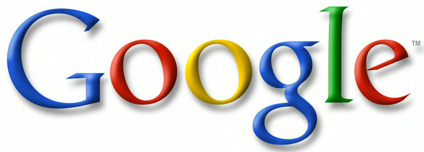
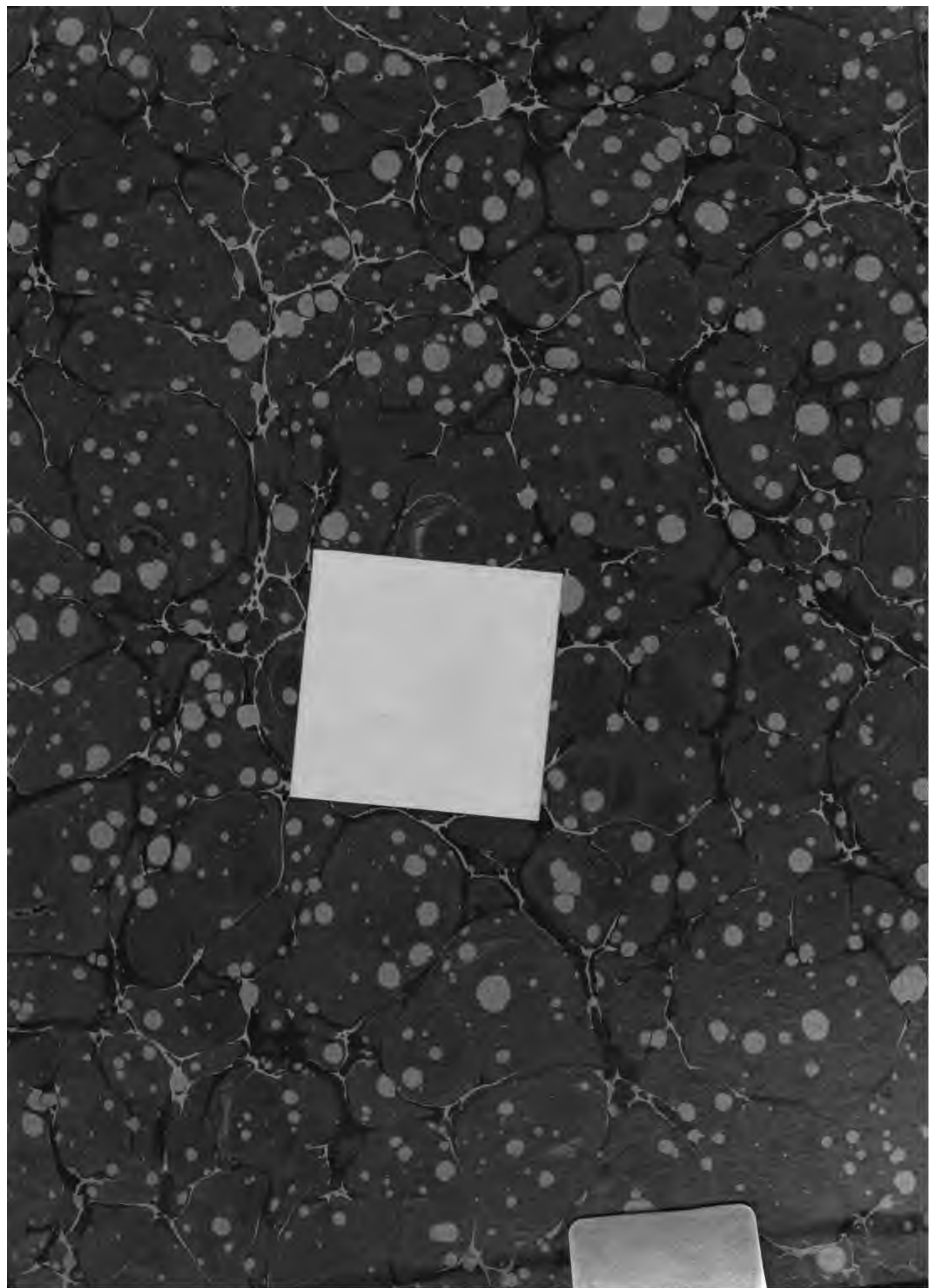
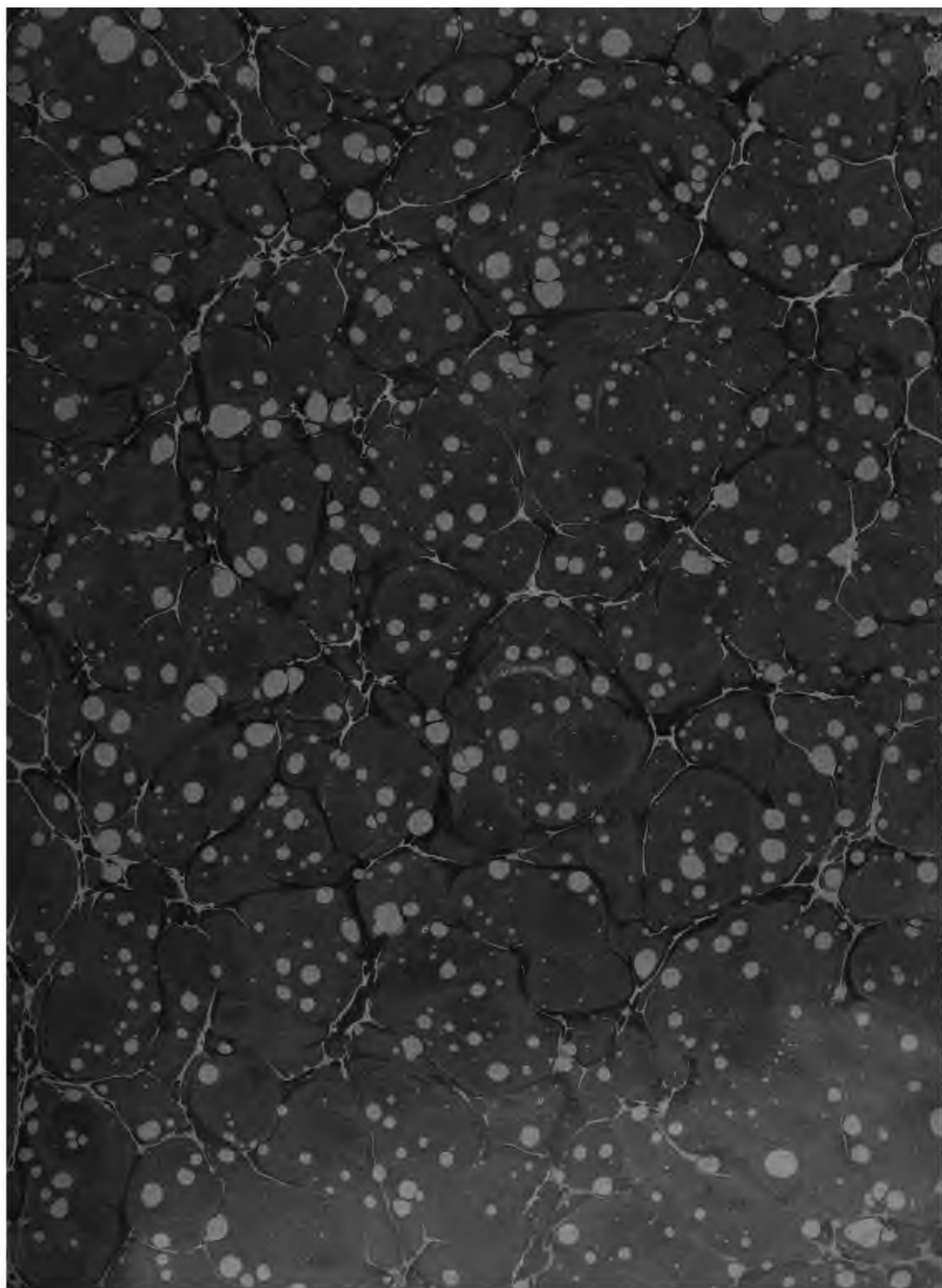

Google


Stanford University Libraries
3 6105 000 820 659





ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

29

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG.
1905.
CENTRALTRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

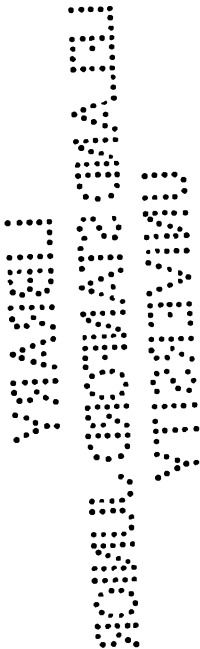
G. MITTAG-LEFFLER

29

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG.
1905.
CENTRALTRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
PRINZ LOUISFERDINANDSTRASSE 2.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.



INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 29. — 1905. — TOME 29.

Inhaltsverzeichniss. — Table des matières.

ÜBER EINEN GEOMETRISCHEN CALCÜL
(VERKNÜPFUNGS-CALCÜL)

VON

GERHARD HESSENBERG
in BERLIN-CHARLOTTENBURG.

1. Es wird in dieser Arbeit ein geometrischer Calcül mit den Punkten einer Geraden aufgebaut, und zwar auf Grund folgender 3 Sätze:

I) *Durch zwei Punkte ist stets eine und nur eine Gerade möglich.*

II) *Zwei Gerade schneiden sich stets in einem* (*und wegen* I *nur in einem*) *Punkt.*

III) *Gehen die Verbindungslinien homologer Ecken zweier aufeinander bezogener Dreiecke durch einen Punkt, so schneiden sich die homologen Seiten in Punkten einer Geraden.*

Der erste Satz ist ein ebenes Verknüpfungsaxiom. Der zweite könnte durch das Parallelenaxiom ersetzt werden und gilt auf Grund desselben, wenn man die ideale unendlichferne Gerade mit den idealen unendlichfernen Punkten einführt. Die Sätze I und II sollen daher als die »*idealen* ebenen Verknüpfungsaxiome» bezeichnet werden. Es sei bemerkt, dass wir nur die ebene Geometrie betrachten.

Satz III ist der *Desargues'sche Satz*, dessen Beweis in bekannter Weise geführt werden kann, wenn noch die räumlichen Verknüpfungsaxiome vorausgesetzt werden; man zeigt nämlich, dass die durch den Satz beschriebene Figur der Schnitt eines vollständigen räumlichen Fünfecks ist.

2. Der aus diesen Sätzen zu entwickelnde Calcül steht in enger Beziehung zu zwei anderen geometrischen Rechenverfahren. Das erste ist

von STAUDT[1] begonnen und von Herrn LÜROTH[2] durchgeführt worden. Das zweite hat Herr HILBERT angegeben.[3] Allen drei Rechenverfahren gemeinsam sind die commutative und associative Addition, die associative Multiplication und die Verbindung beider Operationen durch die distributiven Gesetze. Angewandt werden diese Operationen im STAUDT-LÜROTH'schen Calcül auf die Würfe, im HILBERT'schen auf die Strecken, die in einer Geraden liegen und einen gegebenen Anfangspunkt haben, in unserem auf die Punkte einer Geraden. Zur Begründung der associativen, commutativen und distributiven Gesetze benutzen STAUDT und LÜROTH den projektiven Fundamentalsatz, Herr HILBERT, und nach seinem Vorgange auch ich, allein den DESARGUES'schen Satz. Und zwar geht Herr HILBERT nur von derjenigen Specialisierung des Satzes aus, die durch das Parallelwerden homologer Seiten der beiden Dreiecke entsteht. Aus dieser Specialisierung kann man aber in einfacher Weise mit alleiniger Hülfe des Axioms I und des Parallelenaxioms den allgemeinen DESARGUES'schen Satz herleiten,[4] so dass die Grundlagen unseres Calcüls nicht umfangreicher sind, wie die des HILBERT'schen.

3. Die unserem Calcül zu Grunde liegenden Constructionen sind die zu den STAUDT-LÜROTH'schen Verfahren gehörigen Linealconstruktionen, andererseits erkennt man in ihnen leicht eine projektivische Verallgemeinerung der HILBERT'schen. Alle drei Rechenverfahren gehen also auf eine gemeinsame Grundlage zurück. In der That hat man gezeigt, dass der projektive Fundamentalsatz aus dem DESARGUES'schen Satz und dem speciellen PASCAL'schen Satz bewiesen werden kann. Mit dem »*speciellen* PASCAL'schen Satz« ist der folgende gemeint:

IV. *Liegen die Ecken eines einfachen Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden, so schneiden sich die Gegenseiten in Punkten einer Geraden.*

---

[1] *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Heft II, § 19, ff., § 27 ff.

[2] *Über das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen.* Math. Ann. Bd. 8 und 9.

[3] *Grundlagen der Geometrie.* Kap. V. Der DESARGUES'sche Satz.

[4] Über eine noch weitergehende Eigenschaft des DESARGUES'schen Satzes hinsichtlich seiner Beweisbarkeit aus Spezialisierungen siehe meine Arbeit *Desargues'scher Satz und Centralcollineation* Archiv der Math., Bd. 3, Heft 1.

Der HILBERT'sche Calcül wie der unsrige enthalten nun diejenigen Eigenschaften des STAUDT-LÜROTH'schen Verfahrens, die allein aus dem DESARGUES'schen Satz folgen. Das sind die beiden associativen, die beiden distributiven Gesetze und von der Addition das commutative. Das commutative Gesetz der Multiplication wird direkt mit dem PASCAL'schen Satz identisch. Der letztere ist mit den Sätzen I bis III nicht beweisbar und darf daher in unseren Untersuchungen nicht angewandt werden.

4. Da wir keinerlei Anordnungsaxiome voraussetzen, können wir über die Anzahl der Punkte einer Geraden keine Angaben machen. Doch bleiben unsere Ergebnisse gültig — auch wenn sie unter Umständen trivial werden, — falls wir die Existenz eines vollständigen Vierecks annehmen, d. h. die Existenz von 4 Punkten, von denen keine 3 in einer Geraden liegen. Da hierdurch nur ein sofort zu übersehender, gänzlich trivialer Fall ausgeschlossen wird, ist diese Voraussetzung unter den Grundlagen unseres Calcüls nicht angeführt.

I. *Projektivische Verknüpfungen.*

5. Unter denjenigen Gebilden der projektivischen Geometrie, die allein aus dem DESARGUES'schen Satz gefolgert werden können, ist besonders die Centralcollineation bemerkenswert, d. h. diejenige Collineation, in der entsprechende Gerade sich auf einer festen Geraden, der Axe, schneiden, und entsprechende Punkte auf Geraden liegen, die durch einen festen Punkt, das Centrum, laufen. Der Nachweis ihrer Existenz ist sehr leicht, wenn man beachtet, dass die Figur des DESARGUES'schen Satzes aus zwei centralcollinearen Dreiecken besteht.[1]

6. Nunmehr denken wir uns eine Figur Φ, die aus irgendwelchen Punkten und gewissen ihrer Verbindungsgeraden besteht. Es sei genau angegeben, wieviel Punkte die Figur enthält, welche davon in gerader Linie liegen sollen und welche nicht, und welche Verbindungsgeraden gezeichnet sein sollen. Die Anzahl dieser Geraden sei n.

---

[1] In der auf S. 2, Fussnote, citierten Arbeit komme ich darauf ausführlicher zurück.

Wir nennen zwei Figuren, die auf Grund derselben Angaben gezeichnet sind, vorübergehend »gleichartige Figuren«. Beispielsweise sind zwei einfache Fünfecke, aber auch zwei vollständige Fünfecke, oder zwei Fünfecke mit den Diagonalen einer bestimmten Ecke *gleichartige* Figuren.

Wir schneiden die n Geraden der Figur Φ mit einer Geraden a in den n Punkten $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Diese projicieren wir von einem Punkte S auf eine zweite Gerade b, in die Punkte $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$. Ziehen wir nun durch den Schnittpunkt von a mit b eine Gerade s, die von a und b verschieden ist, und bilden diejenige Centralcollineation mit dem Centrum S und der Axe s, in der die a der b entspricht, so entsprechen den Punkten A_i die Punkte B_i und diese sind die Schnittpunkte von b mit den Geraden der zu Φ collinearen Figur Ψ, welche natürlich mit Φ gleichartig ist.

Es folgt also: Ist eine gerade Punktreihe $A_1, \ldots, A_n$ der Schnitt einer Figur Φ, so ist jede zu ihr projektivische Punktreihe der Schnitt einer gleichartigen Figur.

7. Im allgemeinen werden nicht alle Punkte A_i, die zu dem Schnitt einer Figur Φ gehören, beliebig sein. Ist eine Figur Φ so beschaffen, dass von einem ebenen Schnitt derselben nicht alle Punkte willkürlich gewählt werden dürfen, so wollen wir sagen, *zwischen den Schnittpunkten bestehe eine Verknüpfung*. Eine solche besteht beispielsweise *nicht* für die Schnittpunkte eines Dreiecks mit einer Geraden. Zu 3 beliebigen Punkten einer Geraden, kann vielmehr jederzeit ein Dreieck gezeichnet werden, dessen Seiten durch diese 3 Punkte gehen (vgl. § 4). Dagegen dürfen von den 6 Schnittpunkten eines vollständigen Vierecks blos 5, von denen eines vollständigen n-Ecks blos $2n - 3$ willkürlich angenommen werden.

8. Die Geraden der Figur Φ mögen mit a_1, a_2, a_3, bis a_n bezeichnet sein und die a in den Punkten A_1, A_2, A_3 bis A_n treffen. Es mögen sich ferner 3 Gerade, etwa a_1, a_2, a_3, darunter befinden, die nicht durch einen Punkt gehen, und deren Schnittpunkte der Figur angehören und durch weitere Gerade, a_4, a_5 bis a_λ mit anderen Punkten der Figur verbunden sind. Ist nun a mit den Punkten A_1 bis A_n bekannt, ferner a_1, a_2 und a_3, so können wir a_4 bis a_λ einzeichnen. Wir werden im allgemeinen unter den Schnittpunkten der a_1 bis a_λ untereinander neue Punkte

von Φ vorfinden und durch dieselben neue Gerade $a_{\lambda+1}$ bis a_μ ziehen können, die wieder neue Punkte liefern. Werden auf diesem Wege nach und nach alle Stücke der Figur erchöpft, und bestimmt diese Figur zugleich eine Verknüpfung zwischen den Punkten A_i, so soll diese eine ***projektive Verknüpfung*** genannt werden. Das Bestehen einer Verknüpfung äussert sich dadurch, dass von einzelnen Geraden a_k, a_l, a_r, ... bei unserem Verfahren *zwei Punkte* ermittelt werden, so dass die Punkte A_k, A_l, A_r nicht willkürlich sind.

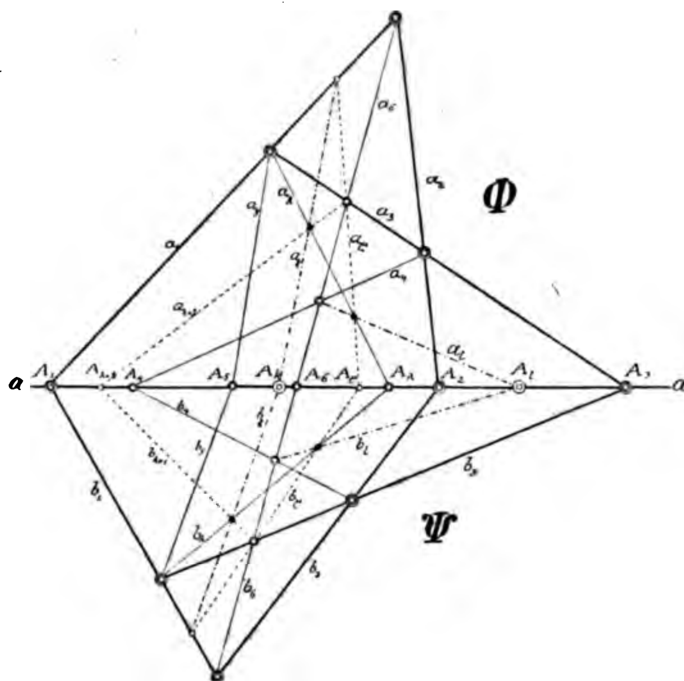


Fig. 1.

9. Wir wollen nunmehr beweisen, dass diese Punkte A_k, A_l, A_r, ... für eine projektive Verknüpfung von der speciellen Wahl der drei ersten Geraden a_1, a_2, a_3 unabhängig, also durch die willkürlichen Punkte $A_1, \ldots, A_\mu$ eindeutig bestimmt sind. Wir zeichnen eine zweite, gleichartige Figur Ψ mit den Geraden b_i in derselben Reihenfolge der Stücke durch dieselben Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Die drei Geraden b_1, b_2, b_3 durch A_1, A_2, A_3 bilden ein Dreieck, das mit dem Dreieck aus a_1, a_2, a_3 auf Grund des DESARGUES'schen Satzes centralcollinear gelegen ist. Denn die homologen

Seiten schneiden sich auf a, also gehen die Verbindungslinien homologer Ecken durch einen Punkt S.

In dieser durch $b_1 b_2 b_3$ bestimmten Collineation entsprechen die Geraden b_4 bis b_λ den Geraden a_4 bis a_λ, da die Ecken der Dreiecke $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$ sich untereinander und die Punkte A_4 bis A_λ als Punkte der Axe sich selbst entsprechen. Daher entsprechen auch die durch $b_1, \ldots, b_\lambda$ neu gefundenen Punkte von Ψ und hinwiederum die dadurch neu gefundenen Geraden $b_{\lambda+1}$ bis b_μ den homologen Stücken von Φ in unserer Collineation u. s. f. Speciell entspricht zuletzt b_k der a_k, und da sich entsprechende Gerade auf der Axe der Collineation schneiden, trifft b_k die a in dem Punkt A_k, *dessen Lage mithin von der speciellen Wahl der Geraden $a_1 a_2 a_3$ unabhängig ist*, w. z. b. w.

Indem wir das Resultat des § 6 beachten, folgt: *Besteht zwischen den Punkten A_1 bis A_n eine projektivische Verknüpfung, so besteht sie zwischen den Punkten jeder dazu projektivischen Punktreihe A'_1 bis A'_n.*

II. *Die Vierecksverknüpfung.*

10. Wir betrachten diejenige projektive Verknüpfung, die entsteht, wenn die Figur Φ ein vollständiges Viereck ist, und nennen sie *Vierecksverknüpfung.*[1] Sie besteht zwischen 6 Punkten einer Geraden und bestimmt den sechsten eindeutig aus den fünf anderen.

Im Anschlusse an die vorhergegangenen Betrachtungen greifen wir drei Seiten des Vierecks heraus, die sich in drei Ecken ABC des Vierecks $ABCD$ schneiden und bezeichnen sie (abweichend von der bisherigen Bezeichnung) mit a_1, b_1, c_1. Wir beachten, dass jede einem andern Paar Gegenseiten des Vierecks angehören muss, da sich zwei Gegenseiten nicht in einer Ecke des Vierecks schneiden. Die Gegenseiten DA, DB, DC seien bezw. mit a_2, b_2, c_2 bezeichnet. Werden die Schnittpunkte mit der

---

[1] Die Eigenschaften derselben sind von STAUDT als Ausgangspunkt seiner Geometrie der Lage gewählt und ohne die allgemeine Betrachtung des Abschnitts I direkt aus dem DESARGUES'schen Satze hergeleitet worden.

festen Geraden a mit den entsprechenden grossen Buchstaben benannt, so wollen wir die Verknüpfung durch das Symbol

$$(A_1\,,\,A_2\,;\,B_1\,,\,B_2\,;\,C_1\,,\,C_2)$$

abkürzen.

Fig. 2.

11. In diesem Symbol sind zweierlei Permutationen zulässig. Erstlich dürfen die Punktepaare beliebig mit einander vertauscht werden, aber ohne dass die Elemente eines Paares mit einander vertauscht werden. Dies folgt aus der Gleichberechtigung der drei Gegenseitenpaare.

Zweitens dürfen in zwei Punktepaaren die Elemente gleichzeitig vertauscht werden. Denn wenn sich $a_1\,,\,b_1\,,\,c_1$ in drei Ecken des Vierecks schneiden, so gilt das gleiche von $a_2\,,\,b_2\,,\,c_1\,;\,a_2\,,\,b_1\,,\,c_2$ und $a_1\,,\,b_2\,,\,c_2$. Dagegen schneiden sich $a_2\,,\,b_2\,,\,c_2$ in *einer* Ecke, ebenso $a_2\,,\,b_1\,,\,c_1\,;\,a_1\,,\,b_2\,,\,c_1\,;$ $a_1\,,\,b_1\,,\,c_2$. Die Vertauschung der Elemente in einem oder allen drei Punktepaaren ist also unzulässig, sofern ihre Zulässigkeit nicht besonders erwiesen wird.

12. Denken wir uns zwei Punkte in der Vierecksverknüpfung veränderlich, so sagt das Bestehen der Verknüpfung aus, dass sie projektive Punktreihen beschreiben. Für uns kommt lediglich der Fall in Betracht, dass die veränderlichen Punkte verschiedenen Paaren angehören. Dann kann angenommen werden, dass es die Punkte $B_2\,,\,C_2$ sind. Wir halten die Geraden $a_1\,,\,a_2$ und b_1 fest und damit die Ecken A und C des Vierecks. Da C_1 fest ist, bleibt auch $AC_1 = c_1$, mithin auch B liegen. Bewegen sich jetzt B_2 und C_2, so bewegt sich D auf a_2 und wird von C und B

aus nach C_2 und B_2 projiciert; also beschreiben C_2 und B_2 projektive Punktreihen. Fällt D nach A, so fällt B_2 nach C_1, C_2 nach B_1. Fällt D in den Schnittpunkt von a_1 und a_2, so fallen C_2 und B_2 nach A_1; fällt D nach A_2, so fallen B_2 und C_2 nach A_2.

13. Im folgenden denken wir uns die Punkte A_1, A_2 und B_1 fest, so dass wir sie in der Bezeichnung nicht weiter anzudeuten brauchen. Wir schreiben dann abkürzungsweise

$$B_2 = (C_1 C_2)$$

um auszusprechen, dass die Verknüpfung

$$(A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2)$$

besteht. Die Bezeichnung ist eine provisorische.

Das Resultat des letzten Paragraphen kann dann so ausgesprochen werden:

V. ***Bewegt sich ein Punkt X, so beschreiben die Punkte $Y = (CX)$ und $Y' = (XC)$ zu X projektive Punktreihen. Die Elemente A_1 und A_2 sind selbstentsprechende; fällt X nach B_1, so wird $Y = Y' = C$.***

Wir verallgemeinern dementsprechend unsere Bezeichnungsweise durch die Festsetzungen:

$$(A_1 X) = (X A_1) = A_1;$$

$$(A_2 X) = (X A_2) = A_2;$$

$$(B_1 X) = (X B_1) = X_1.$$

III. *Das associative Gesetz.*

14. Es besteht das Gesetz:

$$(C_1(C_2 C_3)) = ((C_1 C_2) C_3)$$

welches wir rein formal, ohne einen Schnittpunktsatz zu Hülfe zu nehmen, auf Grund der bisherigen Entwickelungen beweisen können.

Zunächst konstruieren wir den Punkt $B_2 = (C_1 C_2)$ mit Hülfe eines Vierecks $ABCD$, von dem, wie bisher, die Seiten BC, CA, AB durch

A_1, B_1, C_1, die Seiten DA, DB, DC durch A_2, B_2, C_2 gehen. Sodann finden wir den Punkt $P = (B_2 C_3)$, indem wir die durch A_1, A_2 und B_2 gehenden Seiten beibehalten, folgendermassen: Wir ziehen $B_1 D$ bis zum Schnitt E mit $A_1 B$, EC_3 bis zum Schnitt F mit $A_2 D$. BF trifft a in $P = ((C_1 C_2) C_3)$.

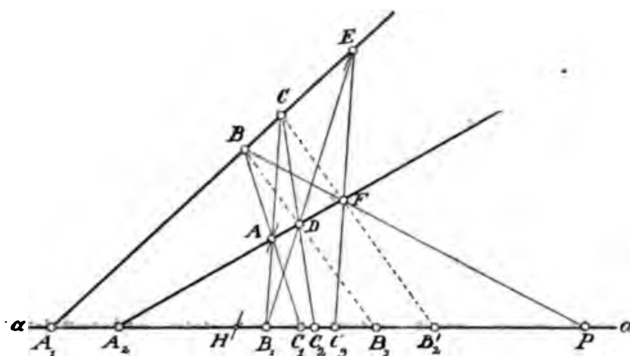


Fig. 3.

Trifft nun CF die a in B_2', so ergiebt das Viereck $CDEF$ die Verknüpfung $(A_1, A_2; B_1, B_2'; C_2, C_3)$ oder $B_2' = (C_2 C_3)$. Sodann folgt aus dem Viereck $ABCF$ die Verknüpfung

$$(A_1, A_2; B_1, P; C_1, B_2') \quad \text{oder} \quad P = (C_1 B_2') = (C_1(C_2 C_3)).$$

Damit ist das associative Gesetz bewiesen.

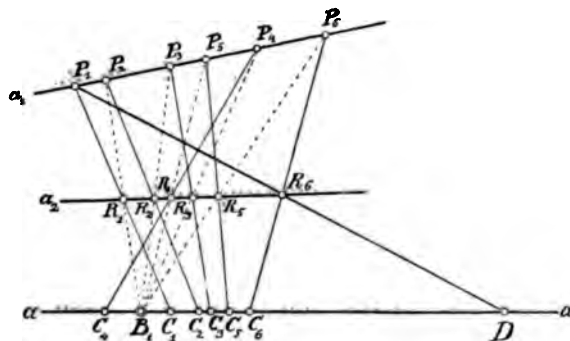


Fig. 4.

15. Figur 4 zeigt, wie der Punkt $D = (C_1 C_2 C_3 \ldots C_n)$ zu konstruieren ist. Man zieht durch C_1 einen beliebigen Strahl, der die a_1 in P_1,

die a_2 in R_1 schneiden möge. B_1R_1 schneide a_1 in P_2, C_2P_2 die a_2 in R_2, allgemein $B_1R_{\lambda-1}$ die a_1 in P_λ, $C_\lambda P_\lambda$ die a_2 in R_λ. P_1R_n trifft a in D.

Allgemeiner würde P_iR_k, wenn $k > i$ ist, die a im Punkte $(C_iC_{i+1}\ldots C_k)$ treffen. Die Konstruktion versagt nicht, wenn eines der C, etwa C_λ, mit B_1 identisch wird. Alsdann wird $R_{\lambda-1} = R_\lambda$, $P_\lambda = P_{\lambda+1}$ und die Konstruktion ändert sich nicht, wenn C_λ überhaupt fortgelassen wird.

16. Die »Auflösung« der symbolischen Gleichungen $(MX) = N$ und $(XM) = N$ nach X kann auf Grund des associativen Gesetzes in der bekannten Weise ausgeführt werden,[1] indem man einen Punkt $Y = (M^{-1})$ aus der Verknüpfung $(YM) = B_1$ oder

$$(A_1, A_2; B_1, B_1; Y, M)$$

konstruiert. Vertauscht man nach § 11 die Elemente im zweiten und dritten Paar, so entsteht die Verknüpfung $(A_1, A_2; B_1, B_1; M, Y)$ oder $(MY) = B_1$.

Hiermit folgt aus $(MX) = N$; $(YMX) = (YN)$ oder $(B_1X) = (YN)$ oder $X = (YN)$; ebenso $X = (NY)$ aus $(XM) = N$.

IV. *Das commutative Gesetz.*

17. *Das commutative Gesetz ist identisch mit dem Satz* IV (Pascal'scher Satz), *also auf Grund der Sätze* I *bis* III *nicht zu beweisen.*

Das Bestehen der beiden symbolischen Gleichungen

$$B_2 = (C_1C_2) = (C_2C_1)$$

bedeutet die Existenz der beiden Verknüpfungen

$$(A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2) \quad \text{und} \quad (A_1, A_2; B_1, B_2; C_2, C_1).$$

Wir denken uns das zur ersten Verknüpfung gehörige Viereck mit den Bezeichnungen des § 10 gezeichnet und konstruieren das zur zweiten gehörige unter Beibehaltung der 3 Geraden a_1, a_2, b_1 also der Ecken A, C. An Stelle der Geraden $c_1 = AB$, $c_2 = DC$ treten jetzt $c_2' = AB'$, $c_1' = D'C$.

[1] Vgl. hierzu § 25 und 27.

Es ergiebt sich also B' als Schnitt von C_2A mit $a_1 = A_1C$, D' als Schnitt von C_1C mit $a_2 = A_2A$. B_2' ist der Schnitt von $B'D'$ mit a. Soll es mit $B_2 = (C_1C_2)$ zusammenfallen, so laufen die 3 Geraden BD, $B'D'$ und a durch einen Punkt.

Dann aber ist das Sechseck $ABDCD'B'$ ein PASCAL'sches, dessen Ecken abwechselnd auf zwei Geraden liegen und dessen Gegenseiten sich in Punkten $B_2C_1C_2$ einer Geraden schneiden. Die obige Behauptung ist damit erwiesen.

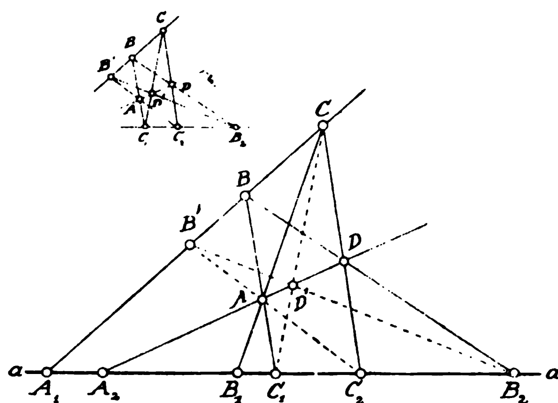


Fig. 5.

18. In speciellen Fällen kann eine Verknüpfung auch auf Grund des DESARGUES'schen Satzes commutativ sein. Der einfachste, bereits in § 16 angewandte Fall, tritt ein, wenn zwei Elemente eines Paares zusammenfallen. Denn dann kommt eine Permutation der Elemente dieses und eines zweiten Paares, die nach § 11 zulässig ist, auf eine alleinige Vertauschung der Elemente des zweiten Paares hinaus. Davon giebt es zwei Anwendungen:

VI. *Ist* $(C_1C_2) = B_1$, *so ist auch* $(C_2C_1) = B_1$.

VII. *Wenn* A_1 *und* A_2 *zusammenfallen, so ist allgemein* $(C_1C_2) = (C_2C_1)$.

Im Falle des Satzes VII wird aus Figur 5 ein PASCAL'sches Sechseck, dessen Existenz sich auf Grund unserer Entwickelungen aus dem DESARGUES'schen Satz ableiten lässt.[1]

---

[1] Vgl. meine Arbeit: *Über Beweise von Schnittpunktsätzen*, Archiv der Math. Bd. 3, Heft 1.

V. *Symbolischer Calcül und distributive Gesetze.*

19. Sind A_1 und A_2 von einander verschieden, so gleicht unsere Operation der Multiplication: Es giebt zwei Elemente A die durch die Operation (LA) bei beliebigem L in sich selbst übergehen. Wir legen daher A_1 das Zeichen ∞, A_2 das Zeichen o bei. B_1 spielt die Rolle der Einheit und werde daher mit 1 bezeichnet. An Stelle der Verknüpfung

$$(\infty\,,\, 0\,;\, 1\,,\, P\,;\, A\,,\, B)$$

schreiben wir von nun an symbolisch

$$P = AB.$$

Diese Operation ist associativ, aber nicht commutativ.

20. Fallen A_1 und A_2 zusammen, so gleicht unsere Operation der Addition, B_1 der Null. Wir bezeichnen daher $A_1 = A_2$ mit dem Zeichen ∞, B_1 mit o und schreiben für die Verknüpfung

$$(\infty\,,\, \infty\,;\, 0\,,\, S\,;\, A\,,\, B)$$

von nun an symbolisch

$$S = A + B.$$

Diese Operation ist associativ und commutativ.

21. Wir führen jetzt auf einer Geraden diese beiden Verknüpfungen mit denselben Fixpunkten ein, also

$$(\infty\,,\, 0\,;\, 1\,,\, P\,;\, A\,,\, B); \qquad P = AB,$$

$$(\infty\,,\, \infty\,;\, 0\,,\, S\,;\, A\,,\, B); \qquad S = A + B.$$

Dann sind beide durch die distributiven Gesetze verbunden. Nach Satz V ist nämlich die Punktreihe

$$\infty\,,\, 0\,,\, 1\,,\, A\,,\, B\,,\, S\,,\, X\,,\, \ldots$$

projektivisch zu den Punktreihen

$$\infty\,,\, 0\,,\, L\,,\, LA\,,\, LB\,,\, LS\,,\, LX\,,\, \ldots$$

und

$$\infty\,,\,0\,,\,L\,,\,AL\,,\,BL\,,\,SL\,,\,XL\,,\,\ldots\,.$$

Da nun die Verknüpfung $S = A + B$ den Punkt 1 nicht enthält, andererseits eine projektivische ist, folgt aus

$$S = A + B, \quad \text{d. h.} \quad (\infty\,,\,\infty\,;\,0\,,\,S\,;\,A\,,\,B)$$

sofort $LS = LA + LB$, nämlich

$$(\infty\,,\,\infty\,;\,0\,,\,LS\,;\,LA\,,\,LB)$$

oder

$$L(A + B) = LA + LB$$

und analog

$$(A + B)L = AL + BL\,.$$

VI. *Der Ring aus 3 Verknüpfungen.*

22. Ein vollständiges Fünfeck $V_1 V_2 V_3 V_4 V_5$ schneidet mit seinen 10 Seiten $V_i V_k = v_{ik}$ eine Gerade a in 10 Punkten V_{ik} $(i\,, k = 1$ bis $5)$. Zwischen diesen bestimmt es 5 Vierecksverknüpfungen {I}, {II} bis {V} entsprechend den fünf Vierecken (I), (II) bis (V), die durch Weglassen einer Ecke, V_1, V_2 bis V_5, aus ihm gebildet werden können.

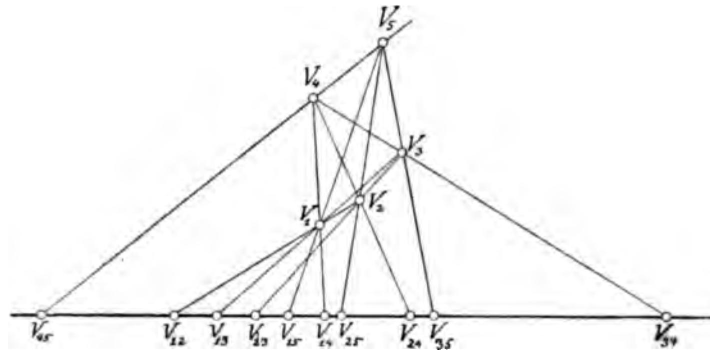


Fig. 6.

Die Verknüpfung {V} bestimmt aus 5 beliebig angenommenen der Punkte V_{ik} $(i, k = 1$ bis $4)$ den sechsten. Nimmt man weiterhin V_{15}

und V_{25} beliebig an, so hat man die Geraden $V_1 V_5$ und $V_2 V_5$ (falls das Viereck (V) gezeichnet ist), und mit diesen die Ecke V_5. Aus dem Viereck (III) findet man sodann V_{45}; besteht umgekehrt die Verknüpfung {III}, so geht $V_4 V_5$ durch V_{45}. Endlich geht $V_3 V_5$ durch V_{35}, wenn die Verknüpfung {II} besteht.

Allgemein wird also das Bestehen dreier der Verknüpfungen hinreichend sein, damit die Punkte V_{ik} die Schnittpunkte eines vollständigen Fünfecks sind. *Je zwei der fünf Verknüpfungen sind daher Consequenzen der dritten*, in unserem speciellen Falle {I} und {IV} von {II}, {III} und {V}.

23. Wir betrachten nunmehr das specielle Fünfeck, welches entsteht, wenn V_1, V_2, V_3 in gerader Linie liegen. Unser Satz wird dann nicht mehr *bedingungslos* gelten, da die zwei Verknüpfungen {IV}{V} durch das Zusammenfallen der Punkte V_{12}, V_{23}, V_{31}, d. h. die Degeneration der Vierecke (IV), (V) bedeutungslos werden. Aber unsere specielle Schluss-

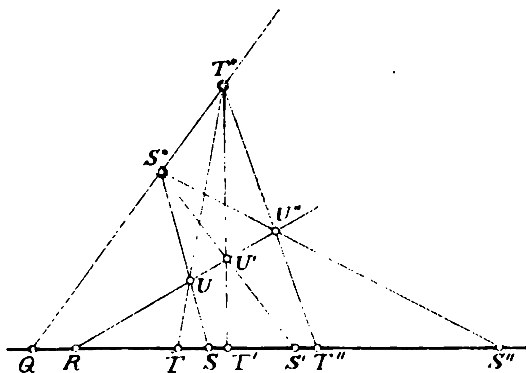


Fig. 7.

weise bleibt wörtlich gültig, und mit ihr die Folgerung, dass die *Verknüpfung* {I} *eine Consequenz von* {II} *und* {III} *ist.* Die diesen Verknüpfungen entsprechenden Vierecke degenerieren nicht. Aus einer kleinen Abänderung der Bezeichnung wird zugleich die Symmetrie der Beziehung zwischen {I}, {II}, {III} klar werden. Wir nennen diese, durch ein specielles Fünfeck vermittelte Beziehung zwischen drei Verknüpfungen einen *Ring* und sagen: *die drei Verknüpfungen* {I}, {II}, {III} *bilden einen Ring.*

24. Wir ändern die Bezeichnungen V_4, V_5 in S^*, T^*; V_1, V_2, V_3 in U, U', U''; V_{45} in Q; $V_{12} = V_{23} = V_{31}$ in R; V_{41}, V_{42}, V_{43} in S, S', S''; V_{51}, V_{52}, V_{53} in T, T', T''. Alsdann lautet unser Satz:

VIII. *Von den drei Verknüpfungen*

$$(Q\,,R\,;S\,,T''\,;T\,,S')\;,\;(Q\,,R\,;S',T''';T',S'')\;;\;(Q\,,R\,;S'',T\,;T'',S)$$

ist jede eine Consequenz der beiden andern.

Der Satz ist leicht direkt, ohne die allgemeine Betrachtung des § 22 an der Figur 7 zu beweisen, und zwar ohne Anwendung von Schnittpunktsätzen, rein formal, wie in der hier gegebenen Ableitung.

Macht man die Substitutionen

$$\frac{Q\,,R\,;\,S\,,S'\,,S''\,;\,T\,,T'\,,T''}{A_2\,,A_1\,;\,B_1\,,C_1\,,P_1\,;\,B_2\,,P_2\,,C_2}\;.$$

so nimmt Satz VIII die Gestalt an

VIII$_a$. *Die drei Verknüpfungen*

$$(A_1\,,A_2\,;P_1\,,P_2\,;C_1\,,C_2)\;;\;(A_1\,,A_2\,;B_1\,,P_2\,;C_1\,,B_2)\;;\;(A_1\,,A_2\,;B_1\,,C_2\,;P_1\,,B_2)$$

bilden einen Ring.

Unter Verwendung der abgekürzten Bezeichnung des § 13:

VIII$_b$. *Die Verknüpfungen*

$$(A_1\,,A_2\,;P_1\,,P_2\,;C_1\,,C_2);\qquad P_2=(C_1B_2);\qquad C_2=(P_1B_2)$$

bilden einen Ring.

Nach Elimination von B_2 nach § 16:

VIII$_c$. *Die Verknüpfung*

$$(A_1\,,A_2\,;P_1\,,P_2\,;C_1\,,C_2)\quad \textit{ist identisch mit}\quad P_2=(C_1(P_1^{-1})C_2)$$

(*Transformation des dritten Fixpunktes*).

25. Der § 16 selbst enthält bereits in den Verknüpfungen

$$(XM)=N,\qquad (MY)=B_1,\qquad X=(NY),$$

einen Ring, der aus VIII_b durch die Specialisierung $P_2 = B_1$ und die Substitutionen

$$P_1 = N, \qquad B_2 = Y, \qquad C_1 = M, \qquad C_2 = X$$

hervorgeht. Die Existenz des Elementes $Y = (M^{-1})$ folgt also direkt aus Satz VIII, ohne die Betrachtungen des Abschnittes III.

Anmerkung. Unter Beachtung dieser Thatsache kann man das associative Gesetz aus Satz VIII ableiten. Ersetzt man, wie eben gezeigt war, die Verknüpfungen des § 14

$$(A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2) \quad \text{bezw.} \quad (A_1, A_2; B_1, B'_2; C_2, C_3)$$

durch

$$(A_1, A_2; B_1, B_1; C_2, H) \text{ (vgl. Fig. 3),}$$

und

$$(A_1, A_2; B_1, C_1; B_2, H) \quad \text{bezw.} \quad (A_1, A_2; B_1, C_3; H, B'_2)$$

so folgt hieraus und aus

$$(A_1, A_2; B_1, P; B_2, C_3) \quad \text{bezw.} \quad (A_1, A_2; B_1, P'; C_1, B'_2)$$

auf Grund des Satzes VIII [1]

$$(A_1, A_2; H, P; C_1, C_3) \quad \text{bezw.} \quad (A_1, A_2; H, P'; C_1, C_3),$$

also $P = P'$, da die Vierecksverknüpfung jedes Element aus den 5 andern eindeutig bestimmt.

26. Die Eigenschaften des Ringes geben uns ein Mittel an die Hand, um aus einer Verknüpfung eine andere abzuleiten, in der zwei Elemente ein Paar bilden, die in der ersten getrennt waren.

Es sei durch geeignete Permutationen bewirkt, dass die getrennten und zu vereinigenden Elemente an vierter und fünfter Stelle stehen. Sie seien mit A und B bezeichnet und unsere Verknüpfung laute

$$(V, U; E, A; B, F) \qquad [= (U, V; A, E; B, F)].$$

---

[1] Man mache die Substitutionen

$$\frac{Q, R; S, S', S''; T, T', T''}{A_1, A_2; C_1, B_2, P; H, B_1, C_3} \quad \text{bezw.} \quad \frac{Q, R; S, S', S''; T, T', T''}{A_2, A_1; C_3, B'_1, P'; H, B_1, C_1}.$$

Wir führen sie über in

$$(V, U; A, B; F', E) \qquad [= (U, V; A, B; E, F')]$$

nach VIII und durch die Substitution

$$\frac{Q, R; S, S', S''; T, T', T''}{V, U; E, F, A; B, A, F'};$$

als mittelste der Relationen VIII ergiebt sich:

$$(V, U; F, F'; A, A) \qquad [= (U, V; A, A; F', F)].$$

Aus den eingeklammerten Umschreibungen ersieht man leicht folgende Regel:

IX. *Um B mit A zusammenzubringen, lasse man das weder B noch A enthaltende Paar unverändert, vertausche B mit dem zu A gehörenden Element E und ersetze das letzte Element F durch ein neues F', welches aus einer dritten Verknüpfung zu entnehmen ist.*

Diese wird so gebildet: Das von A und B freie Paar lasse man stehen; das zweite Paar entsteht durch Verdoppelung von A. Das dritte besteht aus denjenigen Elementen, die zuletzt übrig bleiben, wenn man die vertauschten Elemente (B und E) auch noch ausscheidet, — dass sind F und F'.

27. Als Beispiel wählen wir nochmals die Auflösung der Gleichung $B_2 = (C_1 C_2)$ nach C_1.

Es ist in der Relation

$$(A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2)$$

C_1 an die Stelle von B_2 zu bringen, da es mit B_1 ein Paar bilden soll. Wir vertauschen es mit B_2 und schreiben C_2' für C_2 (erste Hälfte der Regel):

$$(A_1, A_2; B_1, C_1; B_2, C_2').$$

C_2' ergiebt sich, indem man A_1, A_2 stehen lässt, B_1 verdoppelt, die vertauschten (B_2 und C_1) ausscheidet und die übrigbleibenden, — C_2 und C_2' — als drittes Paar wählt (zweite Hälfte der Regel):

$$(A_1, A_2; B_1, B_1; C_2, C_2').$$

Dies sind die drei Relationen

$$B_2 = (C_1 C_2), \qquad C_1 = (B_2 C_2'), \qquad (C_2 C_2') = B_1 .$$

VII. *Coordinaten, Gleichung der Geraden.*

28. Projiciert man einen Punkt P der Ebene auf zwei verschiedenen Wegen auf dieselbe Gerade a, so sollen diese Projektionen X und Y die Coordinaten des Punktes heissen. Führt man auf a einen Calcül ein, so kann man nach der Relation fragen, die zwischen X und Y besteht, wenn sich P auf einer Geraden bewegt.

Wir wählen als einfachste sich bietende Methode die direkte Projektion aus zwei verschiedenen Centren Ξ und H; ΞP treffe a in X, HP treffe sie in Y. Ausserdem sei der Schnitt von $H\Xi$ mit a durch U bezeichnet. Wenn X und Y nicht beide nach U fallen, ist P eindeutig bestimmt und liegt nicht auf ΞH. Die Punkte von ΞH müssen also vorläufig als ausgeschlossen betrachtet werden.

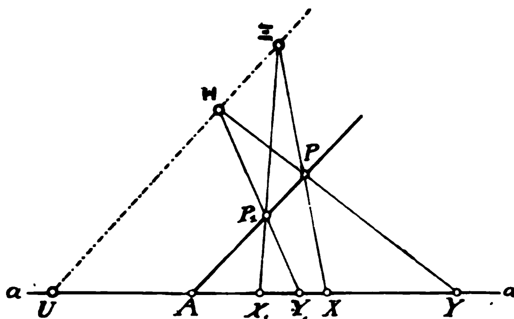


Fig. 8.

29. Schneidet die Gerade PP_1 die a in A, und sind $X_1 Y_1$ die Coordinaten von P_1, so folgt aus dem Viereck ΞHPP_1 die Verknüpfung

$$(U, A; X_1, Y; Y_1, X),$$

die die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass P auf AP_1 liegt.

Da allen diesen Verknüpfungen das Element U gemeinsam ist, empfiehlt es sich, dasselbe als Fixpunkt des Calcüls zu wählen, am besten als

∞, da dieser in der Addition und Multiplikation an erster Stelle steht, während die Rollen von 0 und 1 in beiden Operationen von Grund aus verschieden sind.

Es handelt sich jetzt darum, die Verknüpfung

$$(U, A; X_1, Y; Y_1, X)$$

durch die speciellen unseres Calcüls, in dem die Elemente 0 und 1 irgendwie angenommen seien, auszudrücken.

30. **Erster Fall**: A falle nach 0. Wir schreiben nach Satz VIII_c sofort hin:

$$Y = Y_1 X_1^{-1} X = EX$$

wenn $E = Y_1 X_1^{-1}$ gesetzt wird.

Wie man sieht ist E die Y-Coordinate desjenigen Punktes, für den X in den Einheitspunkt fällt. Man hätte diesen Punkt als P_1 wählen können, wodurch die Verknüpfung sofort die Gestalt

$$(\infty, 0; 1, Y; E, X) \quad \text{oder} \quad Y = EX$$

angenommen hätte.

31. **Zweiter Fall**: A falle nicht nach 0. Die Y-Coordinate desjenigen Punktes, für den X nach 0 fällt, sei N. Wir wählen diesen Punkt als P_1 und erhalten:

$$(\infty, A; 0, Y; N, X).$$ [1]

Wir vertauschen nach Satz IX 0 mit A

$$(1) \qquad (\infty, 0; A, Y'; N, X)$$

und erhalten nach demselben Satz für Y':

$$(2) \qquad (\infty, \infty; Y, Y'; N, X).$$

Für (1) schreiben wir nach VIII_c

$$Y' = NA^{-1}X$$

[1] Fällt A nach ∞, so enthält man $Y = N + X$; dies entspricht einer Festsetzung $A^{-1} = 0$ im Endresultat.

und für (2) nach demselben Satz:

$$Y' = N - Y + X.$$

Damit ergiebt sich nach Elimination von Y':

$$Y = (1 - NA^{-1})X + N$$
$$= EX + N \quad \text{für} \quad E = 1 - NA^{-1}.$$

Also ist die Gleichung der Geraden stets vom ersten Grade und die Coefficienten stehen links von den Coordinaten.

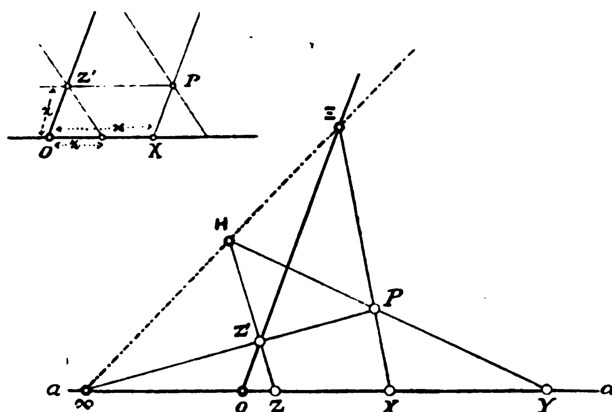


Fig. 9.

32. Zieht man die Gerade Ξo, projiciert P von ∞ auf dieselbe nach Z' und Z' von H nach Z auf a, so erhält man die projektive Verallgemeinerung des von Herrn HILBERT benutzten, dem cartesischen analogen Systems. Zwischen Z, X, Y findet man aus dem Viereck $Z'P\Xi H$ sofort die Verknüpfung

$$(\infty, \infty; o, Y; X, Z)$$

oder

$$Y = Z + X.$$

Danach wird die Gleichung der Geraden in X und Z

$$Z + X = (1 - NA^{-1})X + N,$$
$$Z = E'X + N \quad \text{für} \quad E' = -NA^{-1}$$

also wieder vom ersten Grade.

Hieran kann, fast mit den Worten des Herrn HILBERT, der Beweis angeschlossen werden, dass eine ebene Geometrie, in der die Sätze (I), (II), (III) gelten, als Teil einer räumlichen aufgefasst werden kann, in der die räumlichen Axiome der Verknüpfung in der bekannten Erweiterung durch ideale Elemente gültig sind, und in der es fünf Punkte giebt von denen keine 4 in einer Ebene liegen (cf. § 4).

VIII. *Gleichung der Vierecksverknüpfung.*

33. Wir lösen noch die Aufgabe, mit Hülfe unseres Calcüls die Bedingung dafür aufzustellen, dass zwischen 6 Punkten die Verknüpfung $(A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2)$ bestehe. Wir zeichnen ein Viereck $ABCD$, das

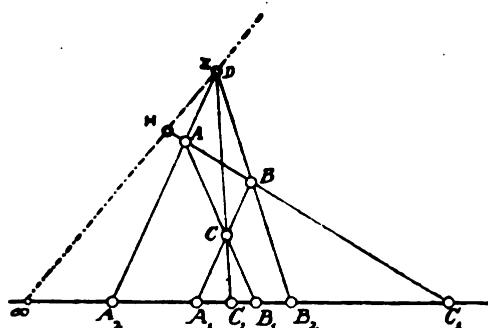


Fig 10.

in gewohnter Weise die Verknüpfung ergiebt, wählen D als Ξ und den Schnittpunkt von $\Xi\infty$ mit AB als H. Danach ergeben sich sofort 5 von den 6 Coordinaten der Punkte ABC. Nämlich:

$$X_a = A_2, \qquad Y_a = C_1,$$
$$X_b = B_2, \qquad Y_b = C_1,$$
$$X_c = C_2.$$

Um Y_c zu finden, giebt es zwei Wege: Man stellt die Gleichungen der durch C gehenden Geraden a_1 und b_1 auf:

$$Y = E_a X + N_a, \qquad Y = E_b X + N_b$$

und wählt $X = X_c = C_2$. Die Vergleichung beider Ausdrücke für Y liefert

die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Verknüpfung.

34. a_1 geht durch A_1; für diesen Punkt ist $X = Y = A_1$, also

$$A_1 = E_a A_1 + N_a, \qquad N_a = -(E_a - 1)A_1.$$

Damit wird die Gleichung von a_1 zu

$$Y = E_a X - (E_a - 1)A_1$$

oder

$$Y - X = (E_a - 1)(X - A_1) = F_a(X - A_1).$$

Setzt man hierin die Coordinaten von B ein, so erhält man für F_a

$$F_a = -(B_2 - C_1)(B_2 - A_1)^{-1},$$

also

$$Y_c - X_c = -(B_2 - C_1)(B_2 - A_1)^{-1}(C_2 - A_1)$$

und aus der Gleichung für b_1 folgt analog

$$Y_c - X_c = -(A_2 - C_1)(A_2 - B_1)^{-1}(C_2 - B_1).$$

Durch Gleichsetzen ergiebt sich die in jedem ihrer Elemente lineare Bedingung

$$(A_2 - C_1)(A_2 - B_1)^{-1}(C_2 - B_1)(C_2 - A_1)^{-1}(B_2 - A_1)(B_2 - C_1)^{-1} = 1.$$

35. Fällt einer der Punkte nach ∞, so hat man die beiden Faktoren, in denen es auftritt, fortzulassen.[1] Fällt beispielsweise A_2 nach ∞, so kann man wieder D nach Ξ, zugleich aber auch A nach H legen. Dadurch wird

$$X_b = B_2, \qquad X_c = C_2, \qquad Y_b = C_1, \qquad Y_c = B_1,$$

---

[1] Dies ist bei Zulässigkeit von Stetigkeitsbetrachtungen sofort klar. Der Ausdruck

$$(A_2 - C_1)(A_2 - B_1)^{-1} = (1 - C_1 A_2^{-1})(1 - B_1 A_2^{-1})^{-1}$$

geht für $A_2 = \infty$ in den Wert 1 über.

und die Gleichung der Geraden A_1BC hat die Form

$$Y - X = F(X - A_1)$$

aus der sich nach Einsetzen der speciellen Wertsysteme und Elimination von F die Relation ergiebt

$$(C_2 - B_1)(C_2 - A_1)^{-1}(B_2 - A_1)(B_2 - C_1)^{-1} = 1.$$

Fallen zwei Punkte nach ∞, so kann die Gleichung der Verknüpfung mittelst der Sätze VIII sofort hingeschrieben werden.

---

36. Die Punkte einer Geraden bilden unter Ausschluss des Punktes ∞ ein *complexes Zahlensystem* im Sinne des Herrn HILBERT:[1] Es fehlen die Gesetze der Anordnung, der Stetigkeit und das commutative Gesetz der Multiplication. Die Rolle der beiden letzteren hat Herr HILBERT durch seine »Nicht-Archimedische» und »Nicht-Pascalsche» Geometrie klargestellt.

In der Geometrie der reinen Schnittpunktsätze (Geometrie der Lage im Sinne STAUDTS) sind die Anordungssätze scheinbar unwesentlich: Aus den Lehrsätzen verschwinden sie nach der Einführung imaginärer Elemente gänzlich; bei den Beweisen sind sie nur hin und wieder notwendig. Auf ihre Bedeutung für diesen Zweig der Geometrie beabsichtige ich in einer zweiten Arbeit zurückzukommen.

August 1901.

---

[1] *Grundlagen der Geometrie*, § 13.

ÜBER DIE BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DER DARSTELLUNG EINES EINDEUTIGEN ZWEIGES EINER MONOGENEN FUNCTION DURCH HERRN MITTAG-LEFFLER, DER METHODE DER MITTELWERTE DES HERRN BOREL UND DER TRANSFORMATION DES HERRN LINDELÖF

VON

L. HANNI
in WIEN.

Es sei durch die Potenzreihe

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}, \tag{1}$$

die innerhalb eines Kreises mit endlichem Radius convergiere, in einem gewissen Bereiche, der sich über den Convergenzkreis von (1) hinaus erstreckt, eine monogene Function $F(x)$ definiert. Nach den bekannten Theoremen [1] des Herrn MITTAG-LEFFLER lässt sich innerhalb des zu den Elementen

$$F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\nu)}(a), \ldots \tag{2}$$

gehörigen Hauptsternes A der Functionszweig $FA(x)$ auf verschiedene Arten durch Ausdrücke darstellen, in denen wie bei der Reihe (1) ausser den Elementen (2) und den Potenzen von $x-a$ nur noch Constanten vorkommen, die von den Elementen (2), von x und von a unabhängig sind. Mit diesen Darstellungen von $FA(x)$ stehen nun die Darstellungen eines Functionszweiges, die man durch die Methode der Mittelwerte des Herrn BOREL und durch die Transformation des Herrn E. LINDELÖF erhält, in engem Zusammenhange, wie wir im Folgenden zeigen werden, indem wir diese drei Methoden mit einander vergleichen.

[1] Acta Mathem., Bd. 23, 24, 26.

I.

An erster Stelle untersuchen wir, in welcher Beziehung die durch die Methode der Mittelwerte sich ergebende Darstellung eines eindeutigen Zweiges von $F(x)$ zur Darstellung desselben durch Herrn MITTAG-LEFFLER steht. Dabei nehmen wir unter den verschiedenen Arten von Mittelwerten den sehr allgemeinen Fall, welchen Herr BOREL in seiner Preisschrift[1] angegeben hat. Ist

$$s_\nu = \sum_{r=0}^{\nu} \frac{1}{\underline{|r}} F^{(r)}(a)(x-a)^r, \qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

so definiert hier Herr BOREL als Mittelwert der Partialsummen

$$s_0\,,\; s_1\,,\; \ldots\,,\; s_\nu\,,\; \ldots$$

den Ausdruck

$$(3) \qquad m_1 = \lim_{t=+\infty} \frac{c_0(t)s_0 + c_1(t)s_1 + \ldots + c_n(t)s_n + \ldots}{c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_n(t) + \ldots},$$

wo die $c_\nu(t)$ Functionen von t sind, die folgenden Bedingungen genügen:[2]

1) Sie sollen für $t \geqq 0$ nicht negativ werden und es soll für diese Werte von t höchstens eine endliche Anzahl derselben verschwinden.
2) Es soll in (3) der Nenner $\varphi(t)$ für $t \geqq 0$ gleichmässig convergieren und $\lim\limits_{t=+\infty} \varphi(t) = +\infty$ sein.
3) Es soll für jeden beliebigen Wert von ν $\lim\limits_{t=+\infty} \dfrac{c_{\nu+1}(t)}{c_\nu(t)} = +\infty$ sein.

[1] Ann. de l'école norm., III ser., 16, (1899), p. 54.

[2] Wie man ausgehend vom Begriffe des arithmetischen Mittels von n Grössen zur Einführung dieser allgemeinen Art von Mittelwerten gelangt, führt Herr BOREL aus in den *Leçons sur les séries diverg.*, chap. III. Hier gibt er zugleich auch eine etwas einfachere Definition eines Mittelwertes, indem er $c_\nu(t) = c_\nu t^\nu$ setzt und ausserdem nur noch annimmt, dass die erste und zweite der oben angeführten Bedingungen erfüllt seien. Doch kann in diesem Falle im allgemeinen auch die dritte Bedingung erfüllt werden, indem man nämlich die Art des Grenzüberganges $\lim t = +\infty$ entsprechend wählt, so dass dann diese Art von Mittelwerten ebenfalls unter der im Texte definierten enthalten ist.

Der so definierte Ausdruck (3) hat nun die Eigenschaft, dass er für alle Werte von x innerhalb des Convergenzkreises von (1) gleichmässig zum Grenzwerte $F(x)$ convergiert, da in demselben für ein endliches r die Functionen $c_0(t)$, $c_1(t)$, ..., $c_r(t)$ wegen seines distributiven Charakters gleich Null gesetzt werden können, ohne seinen Grenzwert zu ändern und die Summen s_ν, $s_{\nu+1}$, ... für $\nu > r$ sich sämmtlich dem Grenzwerte s der Reihe (1) beliebig nähern. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass m_1 noch für Werte von x ausserhalb des Convergenzkreises von (1) convergiert und die Function $F(x)$ darstellt. Da für die Verwendung der Methode der Mittelwerte zur Darstellung eines Functionszweiges nur dieser Fall in Betracht kommt, so können wir über die Functionen $c_\nu(t)$ noch folgende Annahme machen:

4) Ist B ein einfach zusammenhängender Bereich, der ausser dem Einheitskreise wenigstens noch einen endlichen Bereich enthält, so sollen die $c_\nu(t)$ so beschaffen sein, dass der Mittelwert m_1' der Partialsummen der Reihe $1 + x + x^2 + \ldots$ in jedem beliebigen in B gelegenen Bereiche B' gleichmässig convergiert.

Unter dieser Voraussetzung ist dann m_1' in B eine analytische Function von x und es ist daher in diesem Bereiche $m_1' = \frac{1}{1-x}$. Da sich nun mittels des Cauchy'schen Integrals die Transformation der Reihe (1) auf die der geometrischen Reihe zurückführen lässt, so ist diese letzte Voraussetzung über die Functionen $c_\nu(t)$ dazu hinreichend, dass auch ein einfach zusammenhängender Bereich E_1 existiert, der ausser dem Convergenzkreise von (1) wenigstens noch einen endlichen Bereich enthält, und in dem $m_1 = FE_1(x)$ ist.

Der so definierte Mittelwert m_1 ist somit eine Transformation der Potenzreihe (1) in einen Ausdruck mit grösserem Convergenzbereiche, wenn Functionen $c_\nu(t)$ existieren, die diesen Bedingungen genügen. Dass es wirklich solche Functionen gibt, zeigt der bekannte von Herrn Borel ausführlich behandelte Fall $c_\nu(t) = \frac{t^\nu}{\lfloor \nu}$ (exponentielle Summation).

Auf den Mittelwert m_1 kann man wieder denselben Prozess anwenden wie auf die Reihe (1), indem man ihn als Grenzwert einer Reihe von Functionen ansieht, deren Partialsummen σ_0, σ_1, ..., σ_ν, ... so beschaffen

sind, dass $\lim\limits_{\nu=+\infty} \sigma_\nu = m_1$ ist. Um in einfacher Weise eine solche Reihe zu erhalten, lassen wir in (3) den Parameter t der Reihe nach die Werte $t = 0, 1, 2, \ldots$ durchlaufen und bilden die Ausdrücke

$$m_1(\nu) = \frac{c_0(\nu)s_0 + c_1(\nu)s_1 + \ldots + c_n(\nu)s_n + \ldots}{c_0(\nu) + c_1(\nu) + \ldots + c_n(\nu) + \ldots}. \qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

Den Grenzwert (3) kann man dann durch die Reihe

$$(4) \qquad m_1(0) + \sum_{\nu=0}^{\infty} [m_1(\nu+1) - m_1(\nu)]$$

ersetzen, da diese Reihe zu demselben Grenzwert wie (3) convergiert und dasselbe Verhalten zeigt. Wenn nämlich (3) für alle Werte von x in jedem Bereiche E_1' gleichmässig zum Grenzwerte $FE_1(x)$ convergiert, so convergiert daselbst auch die Reihe (4) gleichmässig zu diesem Grenzwerte und umgekehrt. Durch Einführung der Reihe (4) erhält man jetzt in derselben Weise wie Herr Borel[1] in dem Falle, wo $c_\nu(t) = \frac{t^\nu}{|\underline{\nu}}$ ist, als zweiten Mittelwert der Summen $s_0, s_1, \ldots, s_\nu, \ldots$ den Ausdruck

$$m_2 = \lim_{t=+\infty} \frac{c_0(t)m_1(0) + c_1(t)m_1(1) + \ldots + c_\nu(t)m_1(\nu) + \ldots}{c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_\nu(t) + \ldots}.$$

Dieser Ausdruck zeigt wieder denselben Charakter wie der Mittelwert m_1. Denn zwischen den σ_ν und den Partialsummen einer Potenzreihe besteht kein wesentlicher Unterschied, und auch der Convergenzbereich E_1 kann unter sehr allgemeinen Bedingungen betreffs seines Randes auf das Innere eines Kreises conform abgebildet werden. Es folgt daher auch in diesem Falle ebenso wie bei m_1 aus der über die Functionen $c_\nu(t)$ gemachten Annahme 4), dass ein einfach zusammenhängender Bereich E_2 existiert, der in seinem Innern den Bereich E_1 enthält und in dem $m_2 = FE_2(x)$ ist.

Diese Methode, aus einem gegebenen Mittelwerte einen neuen abzuleiten, kann man beliebig fortsetzen und erhält so folgende Kette von Mittelwerten

[1] Ann. de l'école norm., III ser., 16 (1899), p. 53.

$$
(5)\quad \begin{cases}
m_1 = \lim\limits_{t=+\infty} \dfrac{c_0(t)s_0 + c_1(t)s_1 + \ldots + c_\nu(t)s_\nu + \ldots}{c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_\nu(t) + \ldots} \\
m_2 = \lim\limits_{t=+\infty} \dfrac{c_0(t)m_1(0) + c_1(t)m_1(1) + \ldots + c_\nu(t)m_1(\nu) + \ldots}{c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_\nu(t) + \ldots} \\
m_3 = \lim\limits_{t=+\infty} \dfrac{c_0(t)m_2(0) + c_1(t)m_2(1) + \ldots + c_\nu(t)m_2(\nu) + \ldots}{c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_\nu(t) + \ldots} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
m_n = \lim\limits_{t=+\infty} \dfrac{c_0(t)m_{n-1}(0) + c_1(t)m_{n-1}(1) + \ldots + c_\nu(t)m_{n-1}(\nu) + \ldots}{c_0(t) + c_1(t) + \ldots + c_\nu(t) + \ldots} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

die eine Verallgemeinerung der von den Herrn HÖLDER[1] und CESÀRO[2] aufgestellten Kette ist. Jeder Mittelwert dieser Kette ist wieder von demselben Charakter wie der Mittelwert m_1. Da man infolge dessen die Schlüsse, welche bei der Einführung von m_1 und m_2 aus der über die Functionen $c_\nu(t)$ gemachten Annahme 4) gezogen wurden, auch auf jeden folgenden Mittelwert dieser Kette übertragen kann, so existiert eine Folge von einfach zusammenhängenden Bereichen $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ von der Beschaffenheit, dass jeder Bereich E_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ im Innern des folgenden Bereiches liegt und dass für alle Werte von x in demselben $m_\nu = FE_\nu(x)$ ist

Wollen wir diese durch die Methode der Mittelwerte erhaltene Darstellung eines Functionszweiges mit den von Herrn MITTAG-LEFFLER gegebenen Darstellungen vergleichen, so haben wir zu untersuchen, ob sich ein beliebiger Mittelwert m_n der Kette (5) auf eine derselben zurückführen

[1] Mathem. Ann., Bd. 20, (1882), p. 535, ff.

[2] Bull. des sciences mathem., 1890, p. 114, ff.

lässt, und ob die eben gemachten Annahmen dazu hinreichend sind, dass $\lim_{n=+\infty} m_n$ in dem ganzen zu den Elementen (2) gehörigen Hauptstern A convergiert.

Um zur Lösung dieser Aufgabe zu gelangen, stellen wir zunächst m_1 durch folgende Doppelreihe dar

$$m_1 = \begin{cases} \frac{c_0(t)}{\varphi(t)} F(a) \\ \frac{c_1(t)}{\varphi(t)} \{ F(a) + F^{(1)}(a)(x-a) \} \\ \frac{c_2(t)}{\varphi(t)} \left\{ F(a) + F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)(x-a)^2 \right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{c_\nu(t)}{\varphi(t)} \left\{ F(a) + F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

in der t grösser sein soll als eine beliebig grosse positive Zahl M. Diese Doppelreihe convergiert für alle Werte von x, für welche m_1 convergiert, und es ist dann ihr Grenzwert gleich m_1. Bezeichnet nämlich $S_r^{(s)}$ die Summe derjenigen Terme, welche den ersten s Zeilen und r Colonnen dieser Doppelreihe angehören, so besteht die Gleichung $m_1 = \lim_{s=+\infty} \left(\lim_{r=+\infty} S_r^{(s)} \right)$ nicht nur für $r = s$, sondern sie bleibt wegen des distributiven Charakters von m_1 auch noch giltig wenn r und s verschiedene und von einander unabhängige Werte annehmen. Daraus ergibt sich, dass $S_r^{(s)}$ auch zum Grenzwerte m_1 convergiert, wenn man r und s gleichzeitig und unabhängig von einander zum Grenzwerte $+\infty$ übergehen lässt; es besteht somit für alle Werte von x, für welche m_1 convergiert, die Gleichung $m_1 = \lim_{r,s=+\infty} S_r^{(s)}$. Es kann aber der Convergenzbereich von $\lim_{r,s=+\infty} S_r^{(s)}$ auch nicht

grösser sein als der von m_1, da aus der Convergenz dieser Doppelreihe wieder die Convergenz von m_1 folgt. Aus der Convergenz von m_1 folgt ferner, dass auch die einzelnen Colonnen dieser Doppelreihe convergieren. Da dann nach einem zuerst von Herrn O. STOLZ aufgestellten Satze[1] auch die Reihe der Colonnensumme zu demselben Grenzwerte wie die Doppelreihe convergiert, so gilt für alle Werte von x, für welche m_1 convergiert, auch die Gleichung $m_1 = \lim\limits_{r=+\infty} \left(\lim\limits_{s=+\infty} S_r^{(s)}\right)$. Endlich kann der Convergenzbereich der Reihe der Colonnensummen dieser Doppelreihe nicht grösser sein als der Convergenzbereich von m_1; denn wegen des distributiven Charakters der Reihe der Colonnensummen ergibt sich in derselben Weise wie aus der Convergenz von m_1 wieder die Convergenz der Doppelreihe. Die Gleichung (3) geht somit durch diese Transformation über in die äquivalente Gleichung

$$(6)\qquad m_1 = \lim_{t=+\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=\lambda_1}^{\infty} \frac{c_{\lambda_2}(t)}{\varphi(t)} \cdot \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(a)(x-a)^{\lambda_1}$$

$$= \lim_{t=+\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda^{(1)}(t) \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^{\lambda}$$

wo $c_\lambda^{(1)}(t) = \sum\limits_{\lambda_2=\lambda}^{\infty} \frac{c_{\lambda_2}(t)}{\varphi(t)}$ ist, und es ist auf diese Weise m_1 schon als *Grenzwert* eines Ausdruckes dargestellt, der von derselben Form ist wie der von Herrn MITTAG-LEFFLER in der I. note seiner Abhandlung für ein $g_n(x)$ aufgestellte Ausdruch $\sum\limits_{(\nu)} c_\nu^{(n)} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}$.

In derselben Weise kann man jetzt auch den als m_2 definierten Ausdruck transformieren. Berücksichtigt man, dass

$$m_1(\nu) = c_0^{(1)}(\nu)F(a) + c_1^{(1)}(\nu)F^{(1)}(a)(x-a) + c_2^{(1)}(\nu)\frac{1}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots$$

ist, so erhält man für m_2 die unendliche Doppelreihe

---

[1] Mathem. Ann., Bd. 24, (1884), p. 159; über die weitere Ausführung der Theorie der unendlichen Doppelreihen vgl. man: PRINGSHEIM, Sitzungsber. der baier. Akad., math.-phys. Cl. 1897, p. 101 ff., Mathem. Ann., Bd. 53, (1900), p. 289 ff., LONDON, ebenda, p. 322 ff.

$$
(7)\left\{\begin{array}{l}
\frac{c_0(t)}{\varphi(t)}\left\{c_0^{(1)}(0)F(a)+c_1^{(1)}(0)F^{(1)}(a)(x-a)+c_2^{(1)}(0)\frac{1}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\dots\right\}\\
\frac{c_1(t)}{\varphi(t)}\left\{c_0^{(1)}(1)F(a)+c_1^{(1)}(1)F^{(1)}(a)(x-a)+c_2^{(1)}(1)\frac{1}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\dots\right\}\\
\frac{c_2(t)}{\varphi(t)}\left\{c_0^{(1)}(2)F(a)+c_1^{(1)}(2)F^{(1)}(a)(x-a)+c_2^{(1)}(2)\frac{1}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\dots\right\}\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{c_\nu(t)}{\varphi(t)}\left\{c_0^{(1)}(\nu)F(a)+c_1^{(1)}(\nu)F^{(1)}(a)(x-a)+c_2^{(1)}(\nu)\frac{1}{\underline{|2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\dots\right\}\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right.
$$

falls $t > M$ ist. Durch dieselben Schlüsse wie bei der früheren Doppelreihe ergibt sich auch hier wieder aus der Convergenz von m_2 die Convergenz der Doppelreihe (7) und ebenso ist der Convergenzbereich von (7) gleich dem von m_2. Da ferner wegen der über die Functionen $c_\nu(t)$ gemachten Annahme 2) die einzelnen Colonnen von (7) sicher im Convergenzbereiche von m_2 convergieren, so besteht für alle Werte von x in diesem Bereiche wegen der Convergenz der Doppelreihe (7) auch die Gleichung

$$
(8)\qquad m_2 = \lim_{t=+\infty}\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\frac{c_{\lambda_2}(t)}{\varphi(t)}c_{\lambda_1}^{(1)}(\lambda_2)\frac{1}{\underline{|\lambda_1}}F^{(\lambda_1)}(a)(x-a)^{\lambda_1}
$$

$$
= \lim_{t=+\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}c_\lambda^{(2)}(t)\frac{1}{\underline{|\lambda}}F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda .
$$

Endlich kann der Convergenzbereich des Ausdruckes auf der rechten Seite der letzten Gleichung nicht grösser sein als der von m_2; denn aus der Convergenz der Reihe der Colonnensummen von (7) folgt wieder die Convergenz der Doppelreihe. Da somit m_2 durch den Ausdruck auf der rechten Seite von (8) ersetzt werden kann, so ist auch dieser Mittelwert durch einen Grenzwert dargestellt, der dieselbe Form hat wie der eben für m_1 erhaltene Grenzwert (6).

Mit Hilfe der für m_2 erhaltenen Reihe (8) kann man nun auch m_3 in derselben Weise wie m_1 transformieren und so beliebig fortfahren. Hat man nämlich einen Mittelwert m_{n-1} durch den Grenzwert

$$\lim_{t=+\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda^{(n-1)}(t) \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda$$

dargestellt, so hat man, um auch m_n durch einen Grenzwert von derselben Form darzustellen, nur in der Doppelreihe (7) die $c_\lambda^{(1)}(\mu)$ $\left(\begin{matrix}\lambda \\ \mu\end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, \ldots\Big)$ durch $c_\lambda^{(n-1)}(\mu)$ zu ersetzen. Dadurch erhält man wieder eine unendliche Doppelreihe von derselben Form wie (7) und es ergibt sich durch Wiederholung der früheren Schlüsse, dass ihr Grenzwert m_n dem Grenzwert der Reihe ihrer Colonnensummen gleich ist und ihr Convergenzbereich mit dem von m_n identisch ist. Durch diese successive Umformung der Mittelwerte der Kette (5) erhält man somit ebenso wie für m_1 und m_2 auch für jeden folgenden Mittelwert eine Darstellung von der Form

$$(9) \qquad m_n = \lim_{t=+\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda^{(n)}(t) \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda.$$

Vertauscht man nun in dem Ausdrucke auf der rechten Seite von (9) das Summenzeichen und das lim-Zeichen mit einander und setzt man $\lim_{t=+\infty} c_\lambda^{(n)}(t) = c_\lambda^{(n)}$, so geht derselbe in die unendliche Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda^{(n)} \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda$$

über, deren Glieder von derselben Form sind wie die der Polynome $g_n(x)$. Diese Vertauschung des Summenzeichens und des lim-Zeichens ist wirklich gestattet, da dadurch weder der Grenzwert noch der Convergenzbereich von (9) geändert wird. Es bleibt nämlich der zweifache Grenzwert (9), da in demselben t und λ von einander unabhängig sind, unverändert, wenn man t und λ unabhängig von einander zur Grenze $+\infty$ übergehen lässt und somit convergiert auch der Ausdruck

$$(10) \qquad \lim_{t,\nu=+\infty} \sum_{\lambda=0}^{\nu} c_\lambda^{(n)}(t) \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda$$

für alle Werte von x, für welche (9) convergiert, zum Grenzwerte m_n.

Wegen der Convergenz von $\lim\limits_{t=+\infty} c_\lambda^{(n)}(t)\frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda$ ergibt sich daraus schon, dass für alle Werte von x im Geltungsbereiche von m_n die Gleichung besteht

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \lim_{t=+\infty} c_\lambda^{(n)}(t)\frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda = \lim_{t,\nu=+\infty} \sum_{\lambda=0}^{\nu} c_\lambda^{(n)}(t)\frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda$$

und daher

$$m_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda^{(n)}\frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda \tag{11}$$

ist. Da ebenso umgekehrt aus der Convergenz der Reihe auf der rechten Seite von (11) die Convergenz von (10) und aus der Convergenz von (10) wieder die des Ausdruckes (9) folgt, so kann der Convergenzbereich der Reihe (11) auch nicht grösser sein als der von m_n und es darf somit die Gleichung (9) durch die Gleichung (11) ersetzt werden.

Nachdem so durch die Verwandlung in eine unendliche Doppelreihe ein Mittelwert m_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ der Kette (5) in die Reihe (11) transformiert worden ist, kann man die durch die Methode der Mittelwerte sich ergebende Darstellung eines eindeutigen Functionszweiges $FE_n(x)$ jetzt unmittelbar auf dieselbe Form bringen, welche die von Herrn Mittag-Leffler in der I. note seiner Abhandlung durch den Grenzwert eines Polynoms $g_n(x)$ erhaltene Darstellung eines Functionszweiges $FX(x)$ hat. Setzt man nämlich

$$f_n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\nu_n} c_\lambda^{(n)}\frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda,$$

so kann man in derselben Weise wie Herr Mittag-Leffler in dieser note Zahlen N_n von solcher Beschaffenheit bestimmen, dass für alle Werte von x im Bereiche E_n aus der Gleichung (11) die Ungleichung folgt

$$|FE_n(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \qquad \nu_n > N_n. \qquad {\scriptstyle (n=1,2,3,\ldots)}$$

Diese Ausdrücke $f_n(x)$, auf welche jetzt die Mittelwerte (5) zurückgeführt sind, unterscheiden sich von den Polynomen $g_n(x)$ nur noch durch die Form der von den Elementen (2), von x und von a unabhängigen Constanten $c_\lambda^{(n)}$. Doch ist dieser Unterschied zwischen den $f_n(x)$ und $g_n(x)$

insofern nicht mehr ein wesentlicher, als auch die $f_n(x)$ durch die in der I. note der Abhandlung des Herrn MITTAG-LEFFLER angegebene Methode erhalten werden können. Wie Herr MITTAG-LEFFLER bemerkt,[1] lassen sich nämlich durch diese Methode ausser den $g_n(x)$ noch beliebig viele andere Polynome angeben, welche denselben Bedingungen wie die $g_n(x)$ genügen und sich von diesen wie die $f_n(x)$ nur durch die Form der Constanten $c_\lambda^{(n)}$ unterscheiden. Es ist somit die durch die Methode der Mittelwerte sich ergebende Darstellung eines Functionszweiges nicht nur von derselben äusseren Form wie die durch die $g_n(x)$ des Herrn MITTAG-LEFFLER, sondern man kann sogar zu den Ausdrücken (5) anstatt durch die Methode der Mittelwerte auch durch die in der I. note verwendete Methode des Herrn MITTAG-LEFFLER gelangen.

Die Methode der Mittelwerte steht ferner auch in enger Beziehung zu der in der II. note des Herrn MITTAG-LEFFLER angegebenen Darstellung eines Functionszweiges. Die als Mittelwerte definierten Ausdrücke (5) kann man nämlich auch durch n-fach unendliche Reihen darstellen, welche analoge Eigenschaften besitzen wie die von Herrn MITTAG-LEFFLER in dieser note zur Darstellung eines Functionszweiges $FA^{\left(\frac{1}{n}\right)}(x)$ verwendeten n-fach unendlichen Reihen. Zu dieser Darstellung der Ausdrücke (5) gelangt man, wenn man den Ausdruck auf der rechten Seite von (9) in der Form schreibt

$$m_n = \lim_{t=+\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_{n+1}=\lambda_1}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(a)(x-a)^{\lambda_1} \frac{c_{\lambda_2}(t)}{\varphi(t)} \cdots \frac{c_{\lambda_n}(\lambda_{n-1})}{\varphi(\lambda_{n-1})} \cdot \frac{c_{\lambda_{n+1}}(\lambda_n)}{\varphi(\lambda_n)}.$$

Da man auch hier das lim-Zeichen unter die Summenzeichen setzen kann, so erhält man für m_n die $n+1$-fach unendliche Reihe

$$(12) \qquad m_n = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_{n+1}=\lambda_1}^{\infty} c^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}} F^{(\lambda_1)}(a)(x-a)^{\lambda_1} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

wo

$$c^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}} = \lim_{t=+\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} \frac{c_{\lambda_2}(t)}{\varphi(t)} \cdots \frac{c_{\lambda_{n+1}}(\lambda_n)}{\varphi(\lambda_n)}$$

ist. Diese $n+1$-fach unendlichen Reihen sind nun schon denen des Herrn MITTAG-LEFFLER analog. Denn zunächst haben die Reihen (12) gleich den

---

[1] Acta mathem., Bd. 23, p. 60.

genannten die Eigenschaft, dass für alle Werte von x, für welche m_n gleichmässig convergiert, auch die einzelnen Reihen

$$f_{\lambda_1\ldots\lambda_n} = \sum_{\lambda_{n+1}=\lambda_1}^{\infty} c^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}} F^{(\lambda_1)}(a)(x-a)^{\lambda_1}$$

$$f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}} = \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} f_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$$

. . . .

. . . .

$$f_{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} f_{\lambda_1\lambda_2}$$

$$f = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} f_{\lambda_1}$$

gleichmässig convergieren, so dass nach der Definition des Herrn MITTAG-LEFFLER[1] für diese Werte von x auch die einem Mittelwerte m_n entsprechende $n+1$-fach unendliche Reihe (12) gleichmässig convergiert. Während ferner eine Reihe (12) bei dieser Art der Summation für alle Werte von x im Convergenzbereiche von m_n convergiert, kann man sie ebenso wie die n-fach unendlichen Reihen MITTAG-LEFFLER's auch in solcher Weise summieren, dass sie nur innerhalb des Convergenzkreises der Reihe (1) convergiert. Sodann treten in den $n+1$-fach unendlichen Reihen (12) ausser den Elementen (2) und den Potenzen von $x-a$ in derselben Weise wie bei den Reihen des Herrn MITTAG-LEFFLER nur noch Constanten $c^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}}$ auf, die von den Elementen (2), von x und von a unabhängig sind. Endlich enthält zufolge der über die Functionen $c_\nu(t)$ gemachten Annahme 4) der Convergenzbereich einer $n+1$-fach unendlichen Reihe den Convergenzbereich der dem vorhergehenden Mittelwerte m_{n-1} entsprechenden n-fach unendlichen Reihe als Theilbereich. Somit unterscheiden sich die $n+1$-fach unendlichen Reihen (12) von denen des Herrn MITTAG-LEFFLER nur dadurch, dass die Constanten $c^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}}$ von den in den letzteren Reihen auftretenden Constanten $c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$ verschieden sind und infolge dessen auch die Convergenzbereiche der Reihen (12) nicht dieselben Eigenschaften besitzen wie die von Herrn MITTAG-LEFFLER in der II. note definierten

[1] Acta mathem., Bd. 24, p. 189.

Bereiche $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$. Da sich aber auch durch die Methode der II. note ausser den dort von Herrn MITTAG-LEFFLER eingeführten n-fach unendlichen Reihen noch beliebig viele andere Arten von n-fach unendlichen Reihen angeben lassen, die sich von denen MITTAG-LEFFLER's wie die Reihen (12) nur durch die Form der darin auftretenden Constanten unterscheiden, so ist die zwischen den n-fach unendlichen Reihen (12) und denen MITTAG-LEFFLER's bestehende Analogie schon dazu hinreichend, dass die Reihen (12) auch durch die Methode der II. note erhalten werden können. Daraus folgt, dass man zu den Ausdrücken (5) anstatt durch die Methode der Mittelwerte auch dadurch gelangen kann, dass man von den Eigenschaften der n-fach unendlichen Reihen ausgeht.

Dieses durch die Transformation der Ausdrücke (5) erhaltene Resultat, dass man zu den Mittelwerten (5) auch durch die von Herrn MITTAG-LEFFLER in der I und II note seiner Abhandlung angegebenen elementaren Methoden gelangen kann, bietet einerseits eine Ergänzung zum § 2 der IV note dieser Abhandlung, wo Herr MITTAG-LEFFLER zu Herrn BOREL's limite généralisée der Folge $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ kommt, indem er vom CAUCHY'schen Integral ausgeht. Andererseits ist dasselbe von besonderer Bedeutung für die weitere Ausbildung der Theorie der Mittelwerte. Es ergibt sich nämlich durch diese Zurückführung der Mittelwerte auf Polynome von der Form $\sum_{\nu=0}^{n_\mu} c_\nu^{(\mu)} \frac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$ und auf n-fach unendliche Reihen von demselben Typus wie die des Herrn MITTAG-LEFFLER die Eigenschaft der Mittelwerte, dass sie ausserhalb des Convergenzkreises der Reihe (1) die Function $F(x)$ darstellen können, als eine Folge davon, dass diese viel allgemeineren Ausdrücke dieselbe Eigenschaft besitzen, und findet so darin gewissermassen ihre Erklärung. Zugleich bietet sich dadurch, dass man die Mittelwerte als speciellen Fall dieser allgemeineren Ausdrücke auffasst, auch die Möglichkeit, die Methode der Mittelwerte zu vervollkommnen.

Dass eine Vervollkommnung dieser Methode wirklich wünschenswert ist, findet man schon, wenn man untersucht, ob die im Anfange gemachten Annahmen dazu hinreichend sind, dass $\lim_{n=+\infty} m_n$ innerhalb des ganzen zu den Elementen (2) gehörigen Hauptsternes A convergiere. Dabei ergibt

sich nämlich, dass die Methode der Mittelwerte nicht denselben Grad von Allgemeinheit besitzt wie die Methoden des Herrn MITTAG-LEFFLER. Denn daraus, dass der einem Mittelwerte m_ν entsprechende Bereich E_ν den Bereich $E_{\nu-1}$ in seinem Innern enthält und die für m_n gefundene Reihe (11) von derselben Form ist wie die Polynome $g_n(x)$, welche die Eigenschaft haben, dass $\lim\limits_{n=+\infty} g_n(x)$ innerhalb A convergiert, folgt noch nicht, dass $\lim\limits_{n=+\infty} m_n$ innerhalb des ganzen zu den Elementen (2) gehörigen Hauptsterns A convergiert. Um dies zu zeigen, hat man nur in (5)

$$c_\nu(t) = \frac{t^\nu}{\underline{|\nu}} \quad \text{und} \quad F(x) = 1 + x + x^2 + \ldots$$

zu setzen. Man erhält dann für $m_1, m_2, m_3, \ldots$ die Werte

$$m_1 = \lim_{t=+\infty} e^{-t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\underline{|\nu}} (1 + x + x^2 + \ldots + x^\nu) = \lim_{t=+\infty} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{e^{t(x-1)}}{1-x}\right]$$

$$m_2 = \lim_{t=+\infty} e^{-t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\underline{|\nu}} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{e^{\nu(x-1)}}{1-x}\right] = \lim_{t=+\infty} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{e^{t(e^{x-1}-1)}}{1-x}\right]$$

$$m_3 = \lim_{t=+\infty} e^{-t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\underline{|\nu}} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{e^{\nu(e^{x-1}-1)}}{1-x}\right] = \lim_{t=+\infty} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{e^{t(e^{e^{x-1}-1}-1)}}{1-x}\right]$$

. . . .

. . . .

. . . .

Setzt man $x = \xi + \eta i$, so sind die Convergenzbereiche $E_1, E_2, E_3, \ldots$ dieser Mittelwerte bestimmt durch die Ungleichungen

$$\xi < 1$$

$$e^{\xi-1} \cos\eta < 1$$

$$e^{e^{\xi-1}\cos\eta-1} \cos(\sin\eta) < 1$$

. . . .

. . . .

. . . .

Zufolge der ersten Ungleichung ist der Convergenzbereich von m_1 jener Theil der Ebene, welcher links von der im Punkte $x = +1$ auf die reelle Achse gezogenen Normalen liegt. Die zweite Ungleichung ist zunächst wieder erfüllt für $\xi < 1$. Sie ist ferner erfüllt für alle Werte von x, für welche $\cos\eta$ negativ ist, also für

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} < \eta < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Diese Werte von x liegen in Streifen von der Breite π, welche parallel zur reellen Achse in Zwischenräumen S_k von der Breite π ins Unendliche verlaufen. Endlich ist die zweite Ungleichung noch erfüllt für solche Werte von x, für welche $\xi \geqq 1$ ist und $\cos\eta$ zwar positiv, aber genügend klein ist. Diese Werte von x liegen in den Zwischenräumen S_k auf der äusseren Seite der Curven $e^{\xi-1}\cos\eta = 1$, welche die im Punkte $x = +1$ auf die reelle Achse errichtete Normale in den Punkten

$$\beta = 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

berühren und die Grenzgeraden der Zwischenräume S_k zu Asymptoten haben. Ebenso wie in der zweiten Ungleichung lässt sich auch in den folgenden Ungleichungen die linke Seite in zwei Factoren zerlegen, von denen der erste für alle Werte von x, für welche die vorhergehende Ungleichung erfüllt ist, kleiner ist als Eins, während der andere ein Cosinus ist. In diesen Ungleichungen zeigt somit der erste Factor dasselbe Verhalten wie $e^{\xi-1}$ in der zweiten Ungleichung; dagegen unterscheidet sich in denselben der aus dem Cosinus bestehende Factor von dem in der zweiten Ungleichung auftretenden analogen Factor $\cos\eta$ dadurch, dass er nicht mehr negativ werden kann. Infolge dessen bleibt unter den eben gemachten Annahmen durch die Bildung der Mittelwerte $m_3, m_4, \ldots, m_\kappa$, die Vergrösserung des Convergenzbereiches darauf beschränkt, dass in jedem Zwischenraume S_k an Stelle der Grenzcurve des Bereiches E_ν $(\nu > 2)$ eine andere Grenzcurve tritt, die zwar innerhalb des von der Grenzcurve des vorhergehenden Bereiches eingeschlossenen Gebietes liegt, aber zugleich die im Punkte $x = +1$ auf die reelle Achse errichtete Normale im Punkte $\eta = 2k\pi$ berührt und sich in ihrem weiteren Verlaufe wieder den beiden Grenzgeraden von S_k nähert. Da der zu den Elementen $1, \underline{|2}, \underline{|3}, \ldots, \underline{|n}, \ldots$ gehörige Hauptstern A aus der ganzen Ebene mit Ausschluss des Theiles $(+1, +\infty)$ der reellen Achse besteht, so convergiert daher der Grenzwert

$\lim\limits_{n=+\infty} m_n$, den man durch fortgesetzte Anwendung dieser Art von Mittelbildung auf die Partialsummen der geometrischen Reihe erhält, nur in einem Theilbereiche des zu diesen Elementen gehörigen Hauptsterns. Wie dieses einfache Beispiel zeigt, sind also die im Anfange dieses Paragraphen über die Functionen $c_\nu(t)$ gemachten Annahmen noch nicht dazu hinreichend, dass man durch Anwendung der Mittelbildung auf die Partialsummen $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ der Reihe (1) zu einem Ausdrucke gelangt, der im ganzen zu den Elementen (2) gehörigen Hauptsterne A convergiert.

II.

Ebenso wie die Methode der Mittelwerte steht auch die Transformation des Herrn LINDELÖF[1] mit den Methoden des Herrn MITTAG-LEFFLER dadurch in enger Beziehung, dass man zu der Darstellung des Functionszweiges $FA(x)$, die man durch diese Transformation erhält, auch von dem Gesichtspunkte aus gelangen kann, von welchem Herr MITTAG-LEFFLER in der II note seiner Abhandlung ausgeht. Bevor wir jedoch dies nachweisen, wollen wir das zu diesem Beweise Nothwendige aus der Arbeit des Herrn LINDELÖF hier anführen.

Wie Herr MITTAG-LEFFLER setzt auch Herr LINDELÖF voraus, dass die Function $F(x)$ durch die Reihe (1) und deren analytische Fortsetzung definiert sei. Um diese durch die Elemente (2) bestimmte Function in einem einfach zusammenhängenden Gebiete T, innerhalb dessen sie überall regulär ist, durch einen expliciten Ausdruck darzustellen, verwendet er die conforme Abbildung. Nach dem DIRICHLET'schen Princip existiert nämlich unter sehr allgemeinen Bedingungen betreffs des Randes von T eine analytische Function $t = \varphi(x)$, durch welche der Bereich T conform auf den Kreis $|t| \leqq 1$ abgebildet wird. Diese Function $\varphi(x)$ ist dann im Innern von T regulär, und ebenso ist auch die umgekehrte Function $x = \psi(t)$ regulär im Innern des Kreises $|t| < 1$. Ordnet man dem Punkte $x = a$ den Punkt $t = 0$ zu, so erhält man daher in der Umgebung des Punktes $t = 0$ für $x - a$ eine Reihe von der Form

$$x - a = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots. \tag{13}$$

[1] Acta soc. scient. Fennicae, tom. 24.

Indem nun Herr LINDELÖF diesen für $x - a$ erhaltenen Ausdruck in die Reihe (1) einsetzt und dann die auf diese Weise sich ergebende Reihe nach Potenzen von t ordnet, erhält er für $F(x)$ eine Reihe von der Form

$$(14) \qquad F(x) = \beta_0 + \beta_1\varphi(x) + \beta_2[\varphi(x)]^2 + \beta_3[\varphi(x)]^3 + \dots,$$

die innerhalb des Bereiches T convergiert. Da nun der zu den Elementen (2) gehörige Hauptstern A ein Bereich T ist, so kann man, falls der Bereich A conform auf einen Kreis abgebildet werden kann, durch diese Transformation auch eine Darstellung des Functionszweiges $FA(x)$ erhalten.

Der oben angegebene Zusammenhang der Transformation des Herrn LINDELÖF mit den Methoden des Herrn MITTAG-LEFFLER ergibt sich nun daraus, dass man zur Einführung dieser Transformation auch gelangen kann, indem man von den Eigenschaften der unendlichen Doppelreihen ausgeht. Diese können nämlich noch convergieren, ohne dass eine einzige Zeile oder Colonne convergiert; ferner können ausser der Doppelreihe z. B. auch die einzelnen Colonnen convergieren, während die Zeilen divergieren. Indem sich aus diesen Eigenschaften der unendlichen Doppelreihen die Möglichkeit ergibt, eine Potenzreihe in eine unendliche Doppelreihe zu verwandeln, in der die einzelnen Zeilen z. B. nur innerhalb des Convergenzkreises der gegebenen Potenzreihe, die Colonnen aber und die Doppelreihe selbst ausserdem noch in einem gewissen Bereiche ausserhalb dieses Convergenzkreises convergieren, erscheint die Vervandlung einer Potenzreihe in eine solche unendliche Doppelreihe als ein geeignetes Mittel, um jene in einen Ausdruck mit grösserem Geltungsbereich zu transformieren. Unter den vielen möglichen Arten, eine Potenzreihe (1) in eine Doppelreihe mit grösserem Convergenzbereiche zu verwandeln, ist die sehr naheliegend, eine solche Doppelreihe dadurch herzustellen, dass man x als Function einer neuen Veränderlichen darstellt. Denn setzt man wie vorhin $x = \psi(t)$, so dass wieder für genügend kleine Werte von t die Gleichung (13) besteht, so geht die Reihe (1) in die Doppelreihe über

$$\begin{array}{l} F(a) + F^{(1)}(a)\alpha_1 t + F^{(1)}(a)\alpha_2 t^2 + F^{(1)}(a)\alpha_3 t^3 + \dots \\ \qquad\qquad \frac{1}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)\alpha_1^2 t^2 + \frac{1}{\underline{|2}} F^{(2)}(a)\, 2\alpha_1\alpha_2 t^3 + \dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{\underline{|3}} F^{(3)}(a)\alpha_1^3 t^3 + \dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots \end{array}$$

welche schon den Bedingungen genügt, unter denen man durch die Verwandlung einer Potenzreihe in eine unendliche Doppelreihe zu einem Ausdrucke mit grösserem Geltungsbereiche gelangt. Da nämlich die Reihe der Colonnensummen dieser Doppelreihe mit der Reihe auf der rechten Seite von (14) identisch ist, so convergieren ihre Colonnen und die Reihe ihrer Colonnensummen innerhalb des Bereiches T, während dies bei den Zeilen und bei der Reihe der Zeilensummen nicht mehr der Fall ist. Ausserdem folgt nach einem Satze des Herrn Stolz[1] aus der Convergenz der Reihe der Colonnensummen dieser Doppelreihe, dass auch die Doppelreihe innerhalb T convergiert. Somit kann man zur Gleichung (14) auch gelangen, indem man davon ausgeht, dass eine unendliche Doppelreihe und die Reihe ihrer Colonnensummen noch convergieren können, ohne dass ihre Zeilen convergieren. Da die Doppelreihen dieser Art ein specieller Fall der n-fach unendlichen Reihen Mittag-Leffler's sind, so ist dadurch zugleich nachgewiesen, dass man die durch die Transformation des Herrn Lindelöf sich ergebende Darstellung eines Functionszweiges auch durch dasselbe Princip erhält, von dem Herr Mittag-Leffler in der II note seiner Abhandlung ausgeht.

III.

Schon zufolge der bisher erhaltenen Resultate stehen auch die durch die Methode der Mittelwerte und durch die Transformation des Herrn Lindelöf sich ergebenden Darstellungen eines Functionszweiges dadurch zu einander in Beziehung, dass man zu denselben durch Anwendung desselben Princips gelangen kann. Ebenso wie die Transformation des Herrn Lindelöf kann man nämlich auch den Mittelwert der Partialsummen s_0, $s_1, s_2, \ldots$ und allgemein den Mittelwert der Ausdrücke $m_\nu(\mu)$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$; $\mu = 0, 1, 2, \ldots$) einführen, indem man von den Eigenschaften der unendlichen Doppelreihen ausgeht; denn auch die Doppelreihen (6) und (8) und die der letzteren analogen Doppelreihen, welche den Mittelwerten $m_3, m_4, \ldots$ entsprechen, haben die Eigenschaft, dass sie und die Reihen ihrer Colonnensummen noch in einem gewissen Bereiche ausserhalb des Convergenzbereiches der Reihe ihrer Zeilensummen convergieren. Man

[1] Mathem. Annalen, Bd. 24, (1884), p. 169.

kann aber die durch die Methode der Mittelwerte und die durch die Methode des Herrn LINDELÖF sich ergebenden Darstellungen eines Functionszweiges nicht nur durch Anwendung desselben Princips erhalten, sondern man kann zur Gleichung (14) in dem Falle, wo $x - a = \frac{t}{1+t}$ und daher $t = \frac{x-a}{1-(x-a)}$ ist (EULER'sche Formel), und zu den Mittelwerten $m_1, m_2, \ldots$ sogar durch denselben Prozess gelangen. Dieser Prozess besteht in der successiven Anwendung der Identität

$$(15) \quad \sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+n\delta} \varphi(\nu)\Delta\psi(\nu) = \varphi(\alpha+n\delta)\psi(\alpha+n\delta) - \varphi(\alpha)\psi(\alpha) - \sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+n\delta} \psi(\nu+\delta)\Delta\varphi(\nu),$$

welche Herr MARKOFF als die Formel der partiellen Summation bezeichnet.[1] Doch schreiben wir im Folgenden die Potenzreihe (1) immer in der Form $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, da sonst einige Ausdrücke wegen der darin auftretenden Differenzen ziemlich schwerfällig würden.

Um die EULER'sche Formel durch successive Anwendung der Identität (15) zu erhalten, hat man in derselben $\alpha = 1$, $\delta = 1$, $\psi(\nu) = \frac{z_\nu}{z-1}$ und daher $\Delta\psi(\nu) = z^\nu$ zu setzen.

Es ergibt sich dann aus derselben die Formel

$$\sum_{\nu=1}^{n} z^\nu \varphi(\nu) = \frac{z}{1-z}\varphi(1) - \frac{z^n}{1-z}\varphi(n) + \frac{z}{1-z}\sum_{\nu=1}^{n} z^\nu \Delta\varphi(\nu).$$

Wendet man nun diese Identität auf die Summen

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu z^\nu, \quad \sum_{\nu=1}^{n} z^\nu \Delta a_\nu, \quad \ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{n} z^\nu \Delta^{m-1} a_\nu$$

---

[1] *Differenzenrechnung*, übers. v. FRIESENDORFF u. PRÜMM, 1896, p. 101. — Über diese Beziehung der Methode der Mittelwerte zur EULER'schen Formel und die daraus sich ergebende Verwandlung der Mittelwerte (5) in n-fach unendliche Reihen MITTAG-LEFFLER's vergleiche man auch die Aufsätze des Verfassers: *Über Borel's Verallgemeinerung des Grenzbegriffes*, Monatshefte f. Math. u. Phys., XII, 1901; *Zurückführung der allgemeinen Mittelbildung Borel's auf Mittag-Leffler's n-fach unendliche Reihen*, ebenda, XIV, 1903.

an, indem man der Reihe nach $\varphi(\nu)$ gleich a_ν, Δa_ν, ..., $\Delta^{m-1} a_\nu$ setzt, so erhält man ein System von m Gleichungen, aus dem sich ergibt[1]

$$(16)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu = a_0 + \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu \Delta^{\nu-1} a_1 + \left(\frac{z}{1-z}\right)^m \sum_{\nu=1}^{n} z^\nu \Delta^m a_\nu - \frac{z^n}{1-z} \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu \Delta^\nu a_n$$

$$= P + Q + R.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung convergiert nun, wenn m und n genügend gross genommen werden, für alle Werte von x, für welche die Reihe

$$(17)\qquad F(x) = a_0 + a_1\left(\frac{z}{1-z}\right) + \Delta a_1\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \ldots + \Delta^{n-1} a_1\left(\frac{z}{1-z}\right)^n + \ldots$$

convergiert, und nur für diese Werte von x und sein Grenzwert ist gleich dem Grenzwerte dieser Reihe. Um dies zu zeigen, stellen wir die rechte Seite von (16) durch folgende Doppelreihe dar

---

[1] Markoff, ebenda, p. 180 u. 102. — In derselben Weise wie bei dem im Texte behandelten Falle kann man auch in dem etwas allgemeineren Falle, wo $z = \frac{at}{1+t}$ und daher $t = \frac{z}{a-z}$ ist, falls a eine positive reelle Grösse bezeichnet, durch Anwendung der Formel der partiellen Summation zur Gleichung (14) gelangen. Durch diese Substitution erhält man nämlich für $F(x)$ die Darstellung

$$F(x) = a_0 + a_1 a \frac{z}{a-z} + \Delta_a a_1 \left(\frac{z}{a-z}\right)^2 + \Delta_a^2 a_1 \left(\frac{z}{a-z}\right)^3 + \ldots$$

wo

$$\Delta_a^\nu a_1 = a^{\nu+1} a_{\nu+1} - \binom{\nu}{1} a^\nu a_\nu + \binom{\nu}{2} a^{\nu-1} a_{\nu-1} - \ldots + (-1)^\nu a a_1$$

ist. Man hat daher, um zu dieser Darstellung durch Anwendung der Formel der partiellen Summation zu gelangen, nur zu beachten, dass

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu a^\nu \left(\frac{z}{a}\right)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a'_\nu z'^\nu \text{ ist.}$$

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\qquad\qquad P+Q+R= \\
&a_0+a_1\left[\frac{z}{1-z}-\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\left(\frac{z}{1-z}\right)^3-\ldots+(-1)^{m-1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^m\right] \\
&\qquad +(-1)^{m-1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^m[z\Delta a_1+z^2\Delta a_2+\ldots+z^n\Delta a_n]-\frac{z^n a_n}{1-z} \\
&\qquad a_2\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\binom{-2}{1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^3+\ldots+\binom{-2}{m-2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^m\right] \\
&\qquad +\binom{-2}{m-2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^m[z\Delta a_2+z^2\Delta a_3+\ldots+z^n\Delta a_{n+1}]-\frac{z^{n+1}\Delta a_n}{(1-z)^2} \\
&\qquad\qquad a_3\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^3+\ldots+\binom{-3}{m-3}\left(\frac{z}{1-z}\right)^m\right] \\
&\qquad +\binom{-3}{m-3}\left(\frac{z}{1-z}\right)^m[z\Delta a_3+z^2\Delta a_4+\ldots+z^n\Delta a_{n+2}]-\frac{z^{n+2}\Delta^2 a_n}{(1-z)^3} \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad a_m\left(\frac{z}{1-z}\right)^m+\left(\frac{z}{1-z}\right)^m[z\Delta a_m+z^2\Delta a_{m+1}+\ldots+z^n\Delta a_{n+m-1}]-\frac{z^{n+m-1}\Delta^{m-1}a_n}{(1-z)^{n+m}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Lässt man in dieser Doppelreihe m und n unabhängig von einander zur Grenze $+\infty$ übergehen, so ist sie äquivalent der dem Ausdrucke P entsprechenden Doppelreihe

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
&a_0+a_1\left[\frac{z}{1-z}-\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\left(\frac{z}{1-z}\right)^3-\ldots+(-1)^{\nu-1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu\ldots\right] \\
&\qquad a_2\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\binom{-2}{1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^3+\ldots+\binom{-2}{\nu-2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu\ldots\right] \\
&\qquad\qquad a_3\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^3+\ldots+\binom{-3}{\nu-3}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu\ldots\right] \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad a_\mu\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^\mu+\ldots+\binom{-\mu}{\nu-\mu}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu\ldots\right] \\
&\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right.
$$

die nach dem Früheren für alle Werte von x, für welche die Reihe (17) convergiert, zu demselben Grenzwert wie diese Reihe convergiert. Denn zunächst ergibt sich, dass für alle Werte von x im Convergenzbereiche von (19) der dem Ausdruck Q entsprechende Theil der Doppelreihe (18) zum Grenzwerte Null convergiert. Für diese Werte von x ist nämlich

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{z}{1-z}\right)^{m+\nu} \Delta^{m+\nu-1} a_1 \right| < \varepsilon,$$

falls $m > g_1$, $n > g_2$ ist. Verwandelt man dieses Restglied in die Doppelreihe

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)^m \Delta^m a_1 \left[\frac{z}{1-z} - \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \ldots + (-1)^{\nu-1}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu \ldots\right]$$

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)^m \Delta^m a_2 \left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \ldots + \binom{-2}{\nu-2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu \ldots\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)^\mu \Delta^\mu a_\mu \left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^\mu + \ldots + \binom{-\mu}{\nu-\mu}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu \ldots\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so sieht man, dass der Grenzwert dieser Doppelreihe auch gleich ist dem Grenzwerte $\lim\limits_{m,n=\infty} Q$. Daher ist für alle Werte von x, für welche die Doppelreihe (19) convergiert $\lim\limits_{m,n=\infty} Q = 0$, und es convergiert somit für diese Werte von x auch der dem Ausdrucke Q entsprechende Theil der Doppelreihe (18) zum Grenzwerte Null. Ferner convergiert bei genügend grossem n der Ausdruck R für alle Werte von x innerhalb des Convergenzbereiches der Reihe (17) zum Grenzwerte Null; denn derselbe entsteht durch Anwendung der Euler'schen Transformation auf das Restglied

$$z^{n-1}(a_n z + a_{n+1} z^2 + \ldots).$$

Es convergiert daher für alle Werte von x, für welche die Doppelreihe (19) convergiert, auch die Doppelreihe (18) zu demselben Grenzwerte wie (19). Endlich folgt umgekehrt aus der Convergenz der Doppelreihe (18)

auch die Convergenz von (19), da dann der den Termen Q und R entsprechende Theil der Doppelreihe (19) als Restglied derselben zum Grenzwert Null convergiert. Es ist somit die durch Anwendung der partiellen Summation entstehende Doppelreihe (18) der durch Substitution sich ergebenden Doppelreihe (19) äquivalent, und man kann daher die EULER'sche Formel auch durch Anwendung der partiellen Summation erhalten.

Um in analoger Weise mittels der Formel der partiellen Summation auch zu den Mittelwerten $m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots$ zu gelangen, führen wir Functionen $\gamma_r(t)$ ein, von denen wir vorläufig nur voraussetzen, dass für jedes beliebige ganzzahlige positive r, — $\lim r = +\infty$ nicht ausgeschlossen —, $\lim\limits_{t=+\infty} \frac{\gamma_r(t)}{r}$ gleichmässig zum Grenzwert Null convergiere. Zufolge dieser Voraussetzung ist dann

$$\lim_{t=+\infty} \frac{\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)+r} = 1$$

und es convergiert die Reihe $\lim\limits_{t=+\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)+r}\right)^\nu a_\nu z^\nu$ gleichmässig zum Grenzwerte $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$. Setzt man nun in (15)

$$\alpha = 1, \qquad \delta = 1, \qquad \psi(\nu) = -\frac{\gamma_r(t)}{r}\left(\frac{\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)+r}\right)^{\nu-1}$$

und daher

$$\Delta\psi(\nu) = \left(\frac{\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)+r}\right)^\nu,$$

so folgt daraus die Gleichung

$$\lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)+r}\right)^\nu \varphi(\nu) = \tag{20}$$

$$\lim_{t=+\infty} \left[\frac{\gamma_r(t)}{r}\{\varphi(1)-\varphi(n)\} + \frac{\gamma_r(t)}{r}\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)+r}\right)^\nu \Delta\varphi(\nu)\right].$$

Um nun zunächst zum Mittelwerte m_1 zu gelangen, wenden wir diese Formeln auf die Summen

$$\lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_1(t)}{\gamma_1(t)+1}\right)^\nu a_\nu z^\nu, \quad \lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_2(t)}{\gamma_2(t)+2}\right)^\nu \Delta(a_\nu z^\nu), \ \ldots,$$

$$\lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_m(t)}{\gamma_m(t)+m}\right)^\nu \Delta^{m-1}(a_\nu z^\nu)$$

an, indem wir der Reihe nach $\varphi(\nu)$ gleich

$$a_\nu z^\nu \,,\; \Delta(a_\nu z^\nu) \,,\; \ldots \,,\; \Delta^{m-1}(a_\nu z^\nu)$$

setzen. Dadurch erhalten wir ein System von m Gleichungen, aus dem sich, wenn wir die Producte

$$\gamma_1(t) \,,\; \gamma_1(t)\cdot\gamma_2(t) \,,\; \ldots \,,\; \gamma_1(t)\cdot\gamma_2(t)\ldots\gamma_m(t)$$

der Kürze wegen mit $k_1, k_2, \ldots, k_m$ bezeichnen, die Gleichung ergibt

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu z^\nu =$$

$$\lim_{t=+\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{m} \frac{k_\nu}{\underline{|\nu}}\Delta^{\nu-1}(a_1 z) + \frac{k_m}{\underline{|m}}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\gamma_m(t)}{\gamma_m(t)+m}\right)^\nu \Delta^m(a_\nu z^\nu) - \sum_{\nu=1}^{m}\frac{k_\nu}{\underline{|\nu}}\Delta^{\nu-1}(a_n z^n)\right].$$

Drückt man in dieser Gleichung die Differenzen $\Delta^{\nu-1}(a_{\mu+1} z^{\mu+1})$ durch die Differenzen $\Delta^\nu s_\mu$ der Partialsummen der Potenzreihe (1) aus und bezeichnet k_0 eine Funktion von t von der Beschaffenheit, dass

$$\lim_{t=+\infty} k_0 = 1$$

ist, so ergibt sich daraus die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu = \tag{21}$$

$$\lim_{t=+\infty}\left[\sum_{\nu=0}^{m}\frac{k_\nu}{\underline{|\nu}}\Delta^\nu s_0 + \frac{k_m}{\underline{|m}}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\gamma_m(t)}{\gamma_m(t)+m}\right)^\nu \Delta^{m+1}s_{\nu-1} - \sum_{\nu=1}^{m}\frac{k_\nu}{\underline{|\nu}}\Delta^\nu s_{n-1}\right]$$

$$= H + I + K,$$

von der man zum Mittelwerte m_1 in analoger Weise gelangt wie von der Gleichung (16) zur Euler'schen Formel. Man erhält nämlich für den Ausdruck H, indem man m zur Grenze $+\infty$ übergehen lässt, die Doppelreihe

$$(22)\quad \begin{cases} s_0\left[k_0 - k_1 + \frac{k_2}{\underline{|2}} - \cdots\cdots\cdots + (-1)^\nu \frac{k_\nu}{\underline{|\nu}} \cdots\right] \\ \quad s_1\left[k_1 - k_2 + \cdots\cdots\cdots + (-1)^{\nu-1} \frac{k_\nu}{\underline{|(\nu-1)}} \cdots\right] \\ \quad\quad \frac{s_2}{\underline{|2}}\left[k_2 - \cdots\cdots\cdots + (-1)^{\nu-2} \frac{k_\nu}{\underline{|(\nu-2)}} \cdots\right] \\ \quad\quad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad\quad\quad\quad \frac{s_\mu}{\underline{|\mu}}\left[k_\mu - \cdots + (-1)^{\nu-\mu} \frac{k_\nu}{\underline{|(\nu-\mu)}} \cdots\right] \\ \quad\quad\quad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

in der die Reihe der Zeilensummen für genügend grosse Werte von t schon den Mittelwert m_1 darstellt, falls

$$\frac{1}{\underline{|m}}\left[k_m - k_{m+1} + \cdots + (-1)^{n-m} \frac{k_n}{\underline{|(n-m)}} \cdots\right] = \frac{c_m(t)}{\varphi(t)} \qquad (m=0,1,2,\ldots)$$

ist.

Bevor wir zum Nachweis übergehen, dass sich der Ausdruck auf der rechten Seite von (21), wenn m und n genügend gross genommen werden, auf die Doppelreihe (22) zurückführen lässt, haben wir daher noch zu untersuchen, ob man einen Mittelwert m_1 durch eine solche Doppelreihe darstellen kann.[1] Damit dies der Fall ist, muss vor allem für $\lim t = +\infty$ das Gleichungssystem bestehen

$$(23)\quad \begin{cases} k_0 - k_1 + \frac{k_2}{\underline{|2}} - \cdots\cdots\cdots + (-1)^n \frac{k_n}{\underline{|n}} \cdots = p_0 \\ \quad k_1 - k_2 + \cdots\cdots\cdots + (-1)^{n-1} \frac{k_n}{\underline{|(n-1)}} \cdots = p_1 \\ \quad \frac{1}{\underline{|2}}\left[k_2 - \cdots\cdots\cdots + (-1)^{n-2} \frac{k_n}{\underline{|(n-2)}} \cdots\right] = p_2 \\ \quad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad\quad\quad \frac{1}{\underline{|m}}\left[k_m - \cdots + (-1)^{n-m} \frac{k_n}{\underline{|(n-m)}} \cdots\right] = p_m \\ \quad\quad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

[1] In dem Falle, wo $c_\nu(t) = \frac{t^\nu}{\underline{|\nu}}$ ist, sieht man unmittelbar, dass dies zutrifft; denn man hat dann nur in m_1 für e^{-t} die Reihe $1 - t + \frac{t^2}{\underline{|2}} \cdots$ einzusetzen.

wo der Kürze wegen $\frac{c_\nu(t)}{\varphi(t)} = p_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ gesetzt ist. Denkt man sich die Ausdrücke auf beiden Seiten dieses Gleichungssystems nach Potenzen von t entwickelt, so ist dasselbe identisch erfüllt, wenn die Coefficienten jeder Potenz von t auf beiden Seiten desselben einander gleich sind und die Reihen auf der linken Seite für $\lim t = +\infty$ gleichmässig convergieren. Um Functionen k_r zu finden, welche diesem Gleichungssystem genügen, stellen wir daher die k_r durch Potenzreihen mit unbestimmten Coefficienten dar und bestimmen dann dieselben dadurch, dass wir die Coefficienten von t^ν $(\nu = \ldots, 1, 2, 3, \ldots)$ auf beiden Seiten von (23) einander gleich setzen. Setzt man demnach

$$k_r = \sum_{(\nu)} k_r^{(\nu)} t^\nu \qquad (r=0,1,2,\ldots) \tag{24}$$

und entwickelt man auch die Functionen p_s nach Potenzen von t, so dass

$$p_s = \sum_{(\nu)} \pi_s^{(\nu)} t^\nu \qquad (s=0,1,2,\ldots) \tag{25}$$

ist, so erhält man auf diese Weise zur Bestimmung der Functionen k_r Gleichungssysteme von der Form

$$\left\{\begin{aligned}
k_0^{(\nu)} - k_1^{(\nu)} + \frac{k_2^{(\nu)}}{\underline{|2}} - \cdots\cdots + (-1)^n \frac{k_n^{(\nu)}}{\underline{|n}} \cdots &= \pi_0^{(\nu)} \\
k_1^{(\nu)} - k_2^{(\nu)} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \frac{k_n^{(\nu)}}{\underline{|(n-1)}} \cdots &= \pi_1^{(\nu)} \\
\frac{1}{\underline{|2}} \left[k_2^{(\nu)} - \cdots\cdots + (-1)^{n-2} \frac{k_n^{(\nu)}}{\underline{|(n-2)}} \cdots \right] &= \pi_2^{(\nu)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\frac{1}{\underline{|m}} \left[k_m^{(\nu)} - \cdots + (-1)^{n-m} \frac{k_n^{(\nu)}}{\underline{|(n-m)}} \cdots \right] &= \pi_m^{(\nu)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{aligned}\right. \tag{26}$$

Da nun die $c_\nu(t)$ und infolge dessen auch die $\pi_s^{(\nu)}$ als bekannt vorausgesetzt sind, so stellt (26) ein unendliches lineares Gleichungssystem zur Bestim-

machten Annahmen für $\lim t = +\infty$ die Reihe ihrer Zeilensummen absolut. Daher convergieren für $\lim t = +\infty$ auch die Colonnen und die Reihe der Colonnensummen dieser Doppelreihe absolut und es ist der Grenzwert der letzteren Reihe gleich dem Grenzwerte der Reihe der Zeilensummen. Somit sind für $\lim t = +\infty$ die aus den Lösungen der Gleichungssysteme (26) für die k_r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ sich ergebenden Reihen absolut convergent und die Reihen (27) gleichmässig convergent und es genügen die zuerst genannten Reihen wirklich dem Gleichungssysteme (23).

Dazu, dass sich ein Mittelwert m_1 durch eine Doppelreihe darstellen lässt, welche man in derselben Weise wie die Doppelreihe (22) durch Anwendung der partiellen Summation erhalten kann, ist aber ausserdem noch nothwendig, dass die dem Gleichungssystem (23) genügenden Functionen k_r für $\lim t = +\infty$ dasselbe Verhalten zeigen wie die in (22) auftretenden Functionen k_r, d. h. für $\lim t = +\infty$ muss $k_0 = 1$ sein und die Quotienten $\frac{k_r}{rk_{r-1}}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ müssen zum Grenzwert $+\infty$ convergieren. Dies ist auch in der That der Fall. Denn zunächst ergibt sich leicht, dass man aus den Gleichungssystemen (26) für k_0 immer eine Reihe von solcher Beschaffenheit erhalten kann, dass $\lim\limits_{t=+\infty} k_0 = 1$ ist, da sowohl der Grenzwert als auch der Convergenzbereich von m_1 unabhängig davon ist, welche Werte eine endliche Anzahl der Functionen $c_\nu(t)$ annimmt. Ist die aus (26) für k_0 sich ergebende Reihe nicht schon von vornherein von dieser Beschaffenheit, so kann man daher die Abänderung der endlichen Anzahl der Functionen $c_\nu(t)$, welche nothwendig ist, um dies zu erreichen, ausführen, ohne dass dadurch der Grenzwert oder der Convergenzbereich von m_1 geändert wird. Um auch zu zeigen, dass in den Reihen (27) die Quotienten $\frac{k_r}{rk_{r-1}}$ für $\lim t = +\infty$ zum Grenzwert $+\infty$ convergieren, gehen wir von der über die Functionen $c_\nu(t)$ gemachten Voraussetzung 3) aus, vermöge welcher

$$(28) \qquad \lim_{t=+\infty} \frac{c_r(t)}{c_{r-1}(t)} = \lim_{t=+\infty} \frac{p_r}{p_{r-1}} = +\infty \qquad (r=1,2,\ldots)$$

ist. Da nun die Reihen (27) die Eigenschaft haben, dass die r^{te} $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ aus der $r-1^{\text{ten}}$ dadurch entsteht, dass man die Glieder der letzteren der Reihe nach mit

können jedoch die $c_\nu(t)$ schon von vornherein so beschaffen sein, dass auch diese letzteren Ausdrücke für $\lim t = +\infty$ zum Grenzwerte $+\infty$ convergieren. Im andern Falle ist wieder eine entsprechende Abänderung einer endlichen Anzahl von Functionen $c_\nu(t)$ dazu hinreichend, um aus den Gleichungssystemen (26) für $k_0, k_1, \ldots, k_{s_1}$ Reihen von solcher Beschaffenheit zu erhalten, dass die Quotienten (29) für $\lim t = +\infty$ zum Grenzwerte $+\infty$ convergieren. Es ist daher allgemein für $r = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

$$\lim_{t=+\infty} \frac{k_r}{r k_{r-1}} = \lim_{t=+\infty} \frac{\gamma_r(t)}{r} = +\infty$$

und es genügen somit die aus den Gleichungen (26) und (24) für die k_r sich ergebenden Reihen denselben Bedingungen wie die in (22) auftretenden Functionen k_r.

Führt man nun in m_1 für die Functionen $\frac{c_s(t)}{\varphi(t)}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ die Reihen (27) ein, so geht m_1 schon in die Reihe der Zeilensummen einer Doppelreihe (22) über. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass für alle Werte von x im Convergenzbereiche von m_1 auch die diesem Mittelwerte entsprechende Doppelreihe zum Grenzwerte m_1 convergiert, da aus denselben Gründen wie bei den früheren Doppelreihen auch bei einer Doppelreihe (22) aus der Convergenz der Reihe ihrer Zeilensummen die Convergenz der Doppelreihe folgt. Es kann aber der Convergenzbereich einer einem Mittelwert m_1 entsprechenden Doppelreihe (22) auch nicht grösser sein als der von m_1. Da nämlich für $\lim t = +\infty$ die Zeilen einer solchen Doppelreihe (22) convergieren, so folgt aus der Convergenz der Doppelreihe die Convergenz der Reihe ihrer Zeilensummen und somit die Convergenz von m_1.

Nachdem nachgewiesen ist, dass man einen Mittelwert m_1 immer durch eine Doppelreihe (22) ersetzen kann, so ergibt sich jetzt leicht, dass man von einer Potenzreihe (1) zum Mittelwerte m_1 durch Anwendung der Formel der partiellen Summation gelangen kann. Denn der durch Anwendung dieser Formel erhaltene Ausdruck auf der rechten Seite von (21) convergiert, wenn man m und n zur Grenze $+\infty$ übergehen lässt, für alle Werte von t und x, für welche die Doppelreihe (22) convergiert, und nur für diese Werte und es ist dann sein Grenzwert gleich dem Grenzwerte der Doppelreihe (22). Um dies zu zeigen, verwandeln wir den Ausdruck auf der rechten Seite von (21) in die Doppelreihe

$$
(30)\left\{\begin{array}{l}
s_0\left[k_0-k_1+\frac{k_2}{\underline{|2}}+\ldots+(-1)^m\frac{k_m}{\underline{|m}}\right]+(-1)^m\frac{k_m}{\underline{|m}}[\Delta s_0+\ldots+\Delta s_{n-1}] \\
\qquad\qquad -s_{n-1}\left[-k_1+\frac{k_2}{\underline{|2}}-\frac{k_3}{\underline{|3}}+\ldots+(-1)^m\frac{k_m}{\underline{|m}}\right] \\
\quad s_1\left[k_1-k_2+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{k_m}{\underline{|(m-1)}}\right]+\binom{-2}{m-1}\frac{k_m}{\underline{|m}}[\Delta s_1+\ldots+\Delta s_n] \\
\qquad\qquad -s_n\left[k_1-k_2+\frac{k_3}{\underline{|2}}-\ldots+(-)^{m-1}\frac{k_m}{\underline{|(m-1)}}\right] \\
\quad \frac{s_2}{\underline{|2}}\left[k_2-\ldots+(-1)^{m-2}\frac{k_m}{\underline{|(m-2)}}\right]+\binom{-3}{m-2}\frac{k_m}{\underline{|m}}[\Delta s_2+\ldots+\Delta s_{n+1}] \\
\qquad\qquad -\frac{s_{n+1}}{\underline{|2}}\left[0+k_2-k_3+\ldots+(-1)^{m-2}\frac{k_m}{\underline{|(m-2)}}\right] \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\quad s_m\frac{k_m}{\underline{|m}}+\frac{k_m}{\underline{|m}}[\Delta s_m+\ldots+\Delta s_{n+m}]-\frac{s_{n+m-1}}{\underline{|m}}[0+0+0+\ldots+k_m]
\end{array}\right.
$$

und lassen m und n unabhängig von einander zur Grenze $+\infty$ übergehen. Der aus dem Ausdrucke H entstandene Theil dieser Doppelreihe geht dann in die Doppelreihe (22) über, während die den Termen I und K entsprechenden Theile derselben den Charakter von Restgliedern besitzen und somit im Convergenzbereiche von (30) zum Grenzwerte Null convergieren. Es convergiert daher für alle Werte von t und x, welche dem Convergenzbereiche der Doppelreihe (30) angehören, auch die Doppelreihe (22), und es ist der Grenzwert der Doppelreihe (30) gleich dem Grenzwerte von (22). Setzt man umgekehrt voraus, dass die Doppelreihe (22) convergiert, so folgt daraus, dass in demselben Bereiche auch die Doppelreihe (30) convergiert, wenn man m und n zur Grenze $+\infty$ übergehen lässt. Zunächst ergibt sich nämlich, dass dann der aus dem Terme K entstandene Theil von (30) zum Grenzwert Null convergiert; denn man erhält diesen Theil der Doppelreihe (30) aus dem Restgliede $\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu x^\nu$ der Potenzreihe (1) auf dieselbe Weise wie die Doppelreihe (22) aus (1). Es convergiert aber auch der dem Ausdrucke I entsprechende Theil der Dop-

pelreihe (30) für alle Werte von t und x im Convergenzbereiche von (22) zum Grenzwerte Null. Man erhält nämlich, indem man die Reihe der Zeilensummen dieses Theiles der Doppelreihe (30) bildet, für I den Ausdruck

$$I = \frac{k_m}{\underline{|m}} (\Delta^m s_n - \Delta^m s_0).$$

Lässt man in diesem Ausdrucke m und n unabhängig von einander zur Grenze $+\infty$ übergehen, so stellt derselbe die Differenz der Restglieder von zwei convergenten Doppelreihen dar, und es ist daher $\lim\limits_{m,n=\infty} I = 0$. Da somit für alle Werte von t und x, für welche die Doppelreihe (22) convergiert, auch das Restglied der Doppelreihe (30) zum Grenzwerte Null convergiert, so sind diese beiden Doppelreihen einander äquivalent. Daraus folgt unmittelbar, dass man den Mittelwert m_1 der Partialsummen der Potenzreihe (1) in analoger Weise wie die EULER'sche Formel durch Anwendung der partiellen Summation auf die Potenzreihe (1) erhalten kann.

Um jetzt auch von dem Mittelwerte m_1 zum Mittelwerte m_2 durch Anwendung der partiellen Summation zu gelangen, stellen wir m_1 durch die Reihe (4) dar und wenden dann die Formel (20) auf die Summen

$$\lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_1(t)}{\gamma_1(t)+1}\right)^\nu \Delta m_1(\nu-1)\,,\ \lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_2(t)}{\gamma_2(t)+2}\right)^\nu \Delta^2 m_1(\nu-1)\,,\ \ldots,$$

$$\lim_{t=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_m(t)}{\gamma_m(t)+m}\right)^\nu \Delta^m m_1(\nu-1)$$

an, indem wir der Reihe nach $\varphi(\nu)$ gleich

$$\Delta m_1(\nu-1)\,,\ \Delta^2 m_1(\nu-1)\,,\ \ldots,\ \Delta^m m_1(\nu-1)$$

setzen. Dadurch erhalten wir ein System von m Gleichungen, aus dem die Gleichung folgt

$$m_1(0) + \sum_{\nu=1}^{n} \Delta m_1(\nu-1) =$$

$$\lim_{t=+\infty} \left[\sum_{\nu=0}^{m} \frac{k_\nu}{\underline{|\nu}} \Delta^\nu m_1(0) + \frac{k_m}{\underline{|m}} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\gamma_m(t)}{\gamma_m(t)+m}\right) \Delta^{m+1} m_1(\nu-1) - \sum_{\nu=1}^{m} \frac{k_\nu}{\underline{|\nu}} \Delta^\nu m_1(n-1)\right].$$

In derselben Weise wie früher ergibt sich wieder, dass für $\lim m = +\infty$,

$\lim n = +\infty$ der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung durch die Doppelreihe

$$
\begin{array}{l}
m_1(0)\left[k_0 - k_1 + \frac{k_2}{\underline{|2}} - \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{\nu} \frac{k_\nu}{\underline{|\nu}} \ldots\right] \\
\qquad m_1(1)\left[k_1 - k_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{\nu-1} \frac{k_\nu}{\underline{|(\nu-1)}} \ldots\right] \\
\qquad\qquad \frac{m_1(2)}{\underline{|2}}\left[k_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{\nu-2} \frac{k_\nu}{\underline{|(\nu-2)}} \ldots\right] \\
\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{m_1(\mu)}{\underline{|\mu}}\left[k_\mu - \ldots + (-1)^{\nu-\mu} \frac{k_\nu}{\underline{|(\nu-\mu)}} \ldots\right] \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

ersetzt werden kann. Setzt man in dieser Doppelreihe für die k_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ wieder die aus den Gleichungen (26) und (24) sich ergebenden Werte ein, so convergiert sie in demselben Bereiche wie m_2 und es ist ihr Grenzwert gleich m_2. In derselben Weise, wie sich der Ausdruck m_1 in den Ausdruck m_2 transformieren lässt, kann man durch Anwendung der partiellen Summation jetzt auch von m_2 zu m_3 übergehen und so beliebig fortfahren. Wir erhalten somit als Resultat dieser Untersuchung, dass man von der Potenzreihe (1) zu den Mittelwerten der Kette (5) auch gelangt, indem man ebenso wie oben bei der Einführung der EULER'schen Formel davon ausgeht, dass man durch die Verwandlung einer Reihe in eine unendliche Doppelreihe einen Ausdruck mit grösserem Convergenzbereich erhalten kann, und dann solche Doppelreihen mittels der Formel der partiellen Summation herstellt.

Diese Art der Einführung der Mittelwerte (5) hat aber nicht nur die Eigenschaft, dass man dadurch diese Mittelwerte auf demselben Wege wie die EULER'sche Formel erhält, ohne dass es dabei nothwendig ist, den Begriff des Mittelwertes einzuführen, sondern es lassen sich die unendlichen Doppelreihen, welche man durch Anwendung der partiellen Summation auf die Potenzreihe (1) und die Mittelwerte (5) erhält, auch leicht in die

Doppelreihen verwandeln, durch welche diese Mittelwerte im Paragraph 1 dargestellt wurden. Um dies zu erreichen, hat man nämlich in den Doppelreihen, welche man durch Anwendung der partiellen Summation erhält, nur für

$$\frac{1}{\underline{|\nu}}\left(k_\nu - k_{\nu+1} + \frac{k_{\nu+2}}{\underline{|2}} - \ldots\right), \qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

wieder die Ausdrücke $\frac{c_\nu(t)}{\varphi(t)}$ einzusetzen und dagegen die Ausdrücke s_ν, $m_1(\nu)$, $m_2(\nu)$, ... in der Form von Reihen anzuschreiben. Es erscheint daher auch die Anwendung der Formel der partiellen Summation als eine Methode, wenn auch eine sehr specielle, um eine Potenzreihe (1) in einen Ausdruck von der Form (11) oder (12) zu verwandeln.

ZUR KENNTNISS DER KREISPUNKTE

VON

ALLVAR GULLSTRAND
in UPSALA.

Um die Constitution des im Auge gebrochenen Strahlenbündels kennen zu lernen hatte ich nöthig das Normalenbündel unter Hinzuziehung von Differentialquotienten der Flächengleichung bis einschliesslich der vierten Ordnung zu untersuchen. Da diese Untersuchungen auch die Normalenbündel eines Flächenelementes, auf welchem sich ein Kreispunkt befindet, umfassen mussten, haben sie zu Ergebnissen geführt, welche vielleicht auch für den Mathematiker vom Fache Interesse haben können.

Die folgende Darstellung ist zum grössten Theile ein Résumé von den das Flächenelement betreffenden Resultaten der an anderer Stelle ausführlich publicirten Untersuchung; doch habe ich die Untersuchung der Kreispunkte hier, wo der rein mathematische Gesichtspunkt ausschlaggebend ist, in gewissem Grade verallgemeinert, während ich mich dort auf das für den speciellen Zweck nöthige Gebiet beschränkt habe.

Von den Kreispunkten hatte man damals keine andere Kenntnisse als die Angabe von DARBOUX,[1] nach welcher für den Fall, wo sämmtliche Differentialquotienten dritter Ordnung der Flächengleichung von Null verschieden sind, die Zahl und Richtung der in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinien gefunden werden können, und, wie ich später erfahren habe, eine Untersuchung einer speciellen Kreispunktsform von FROST,[2] zu welcher CAYLEY[3] eine Bemerkung gefügt hat.

---

[1] *Théorie des surfaces.* T. II, S. 357—359.

[2] *On the direction of lines of curvature in the neighbourhood of an umbilicus.* The quarterly journal of pure and applied mathematics, X, 1870, S. 78.

[3] Ibid. S. 111.

Zwar hatte schon längst LIOUVILLE[1] eine schöne Zeichnung von den Krümmungslinien eines Ellipsoides gegeben, aus welcher ersichtlich ist, dass in die auf solchen vorkommenden Kreispunkte nur eine Krümmungslinie eintreten kann, aber dennoch scheint die Ansicht allgemein geherrscht zu haben, dass von allen Seiten her Krümmungslinien in einen Kreispunkt eintreten, wie z. B. eine Stelle bei PICARD[2] andeutet.

Die neueren Arbeiten über die durch eine Differentialgleichung bestimmten Curven waren noch nicht auf die Krümmungslinien der Fläche angewendet worden.

Seit dem Erscheinen meiner Abhandlung[3] hat aber WAHLGREN[4] gezeigt, dass die Untersuchung der singulären Punkte der Krümmungslinien auf eine Untersuchung von Differentialgleichungen ersten Grades zurückgeführt werden kann, für welche Untersuchung schon früher BENDIXSON[5] die Mittel angegeben hatte.

August 1902.

I. Das allgemeine Flächenelement.

Es sei in einem rechtwinkligen Coordinatensysteme, in welchem der positive Theil der Z-Achse nach vorn vom Anfangspunkt belegen ist, wenn die entsprechenden Theile der X- und Y-Achse nach rechts bezw. nach oben liegen, die Flächengleichung

$$z = px + qy + \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \frac{1}{6}(ux^3 + 3vx^2y + 3wxy^2 + wy^3)$$
$$+ \frac{1}{24}(\partial^{40}x^4 + 4\partial^{31}x^3y + 6\partial^{22}x^2y^2 + 4\partial^{13}xy^3 + \partial^{04}y^4) + \ldots$$

und es werde eine Krümmung als positiv bezeichnet, wenn das Curvenstück

[1] In seiner Ausgabe von MONGE, *Application de l'analyse à la géométrie*, Paris 1850.

[2] *Traité d'analyse*, T. III, S. 225.

[3] *Allgemeine Theorie der monochromatischen Aberrationen und ihre nächsten Ergebnisse für die Ophthalmologie*, Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups., Ser. III, 1900. Separat im Buchhandel zugänglich.

[4] *Sur les points singuliers des équations différentielles du premier ordre et du second degré*, Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handlingar, Bd. 28, Ser. I, N° 4.

[5] *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta math., T. 24.

die concave Seite nach der betreffenden positiven Richtung kehrt, eine Torsion, wenn die Curve im Sinne einer Schraube rechtsgedreht ist, d. h. wenn, x als unabhängige Variabele angesehen, im Coordinatensysteme $dz = dy = d^2y = 0$ das Produkt $d^2z\,d^3y\,dx$ positives Vorzeichen hat.

Die Hauptkrümmungen werden so bezeichnet, dass im Coordinatensysteme $p = q = s = 0$ die Beziehungen

$$D_1 = \frac{1}{\rho_1} = r, \qquad D_{11} = \frac{1}{\rho_{11}} = t$$

gelten.

Für die Ableitungen der Hauptkrümmungen nach den Bogenlängen σ_1 bezw. σ_{11} der Hauptkrümmungslinien wende ich folgende Bezeichnungen an:

$$\frac{dD_1}{d\sigma_1} = U, \qquad \frac{dD_1}{d\sigma_{11}} = V, \qquad \frac{dD_{11}}{d\sigma_1} = W, \qquad \frac{dD_{11}}{d\sigma_{11}} = \mathfrak{W}$$

und nenne U bezw. $\mathfrak{W}$ die directe Krümmungsasymmetrie längs der bezüglichen Hauptkrümmungslinie, W bezw. V die transversale Krümmungsasymmetrie längs der ersten bezw. zweiten Hauptkrümmungslinie.

Diese Asymmetrienwerthe, welche von einander unabhängig sind, bestimmen zusammen mit den Hauptkrümmungen und den Richtungscosinus der Normale sämmtliche Differentialquotienten der Flächengleichung bis einschliesslich der dritten Ordnung und umgekehrt. Im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ gelten die einfachen Beziehungen

$$U = u, \qquad V = v, \qquad W = w, \qquad \mathfrak{W} = \mathfrak{w}.$$

Die geodätischen Krümmungen der beiden Hauptkrümmungslinien sind durch folgende allgemeingiltige Relationen gegeben

$$VR_1 = D_1 - D_{11} = -WR_{11}$$

wobei R_1 bezw. R_{11} die bezüglichen Krümmungshalbmesser sind.

Für die Winkel ϑ_1 bezw. ϑ_{11} zwischen den Hauptnormalen der bezüglichen Krümmungslinien und der Flächennormale, welche positiv gerechnet werden, wenn im Coordinatensysteme $p = q = s = 0$ die betreffende Hauptnormale sich zwischen den positiven Theilen der bezüglichen Coordinatenachsen befindet, gilt:

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\rho_1}{R_1} = \frac{V}{D_1(D_1 - D_{11})}, \qquad \operatorname{tg}\vartheta_{11} = \frac{\rho_{11}}{R_{11}} = -\frac{W}{D_{11}(D_1 - D_{11})}$$

und die ersten Krümmungshalbmesser der beiden Hauptkrümmungslinien sind:

$$\rho' = \rho_1 \cos\vartheta_1 = R_1 \sin\vartheta_1, \qquad \rho'' = \rho_{11} \cos\vartheta_{11} = R_{11} \sin\vartheta_{11}.$$

Von den beiden Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche sei diejenige die erste oder σ'-Schale genannt, welche von der zweiten Hauptnormalebene der Fläche berührt wird, und in welcher die Kantlinie der ersten, d. h. der von den Flächennormalen längs der ersten Krümmungslinie gebildeten, abwickelbaren Normalfläche eine geodätische Linie ist.

Bogenelement $d\sigma_1'$ und Krümmungshalbmesser R' dieser Kantlinie oder σ_1-Linie der σ'-Schale sind:

$$d\sigma_1' = -\frac{U}{D_1^2} d\sigma_1, \qquad R' = \frac{U}{D_1^3}$$

ihre rectificirende Linie ist die Polare der ersten Hauptkrümmungslinie mithin ihre rectificirende Fläche die abwickelbare Polarfläche dieser, ihre Torsion ist:

$$T' = \frac{D_1^2 V}{U(D_1 - D_{11})} = \frac{\rho_1}{R_1 R'} = \frac{\operatorname{tg}\vartheta_1}{R'}.$$

Die Berührungslinie zwischen der ersten Evolutenschale und der zweiten abwickelbaren Normalfläche, die σ_{11}-Linie der σ'-Schale hat das Bogenelement

$$d\sigma_{11}' = \frac{1}{D_1^2}\sqrt{V^2 + D_1^2(D_1 - D_{11})^2}\, d\sigma_{11} = \frac{D_1 - D_{11}}{D_1 \cos\vartheta_1} d\sigma_{11}.$$

Diese Linie wird von der Polare der ersten Krümmungslinie der Fläche berührt, so dass die σ_1- und σ_{11}-Linien der Evolute conjugirte Liniensysteme bilden.

Die Normalschnittkrümmung der σ'-Schale längs der σ_{11}-Linie ist:

$$-\frac{D_1 W \cos^2\vartheta_1}{(D_1 - D_{11})^2}.$$

Für die zweite Evolutenschale gelten die analogen Werthe, nur hat die Torsion der Kantlinie in diesem System entgegengesetztes Vorzeichen.

Für weitere Untersuchungen benütze ich die Ableitungen zweiter Ordnung der Hauptkrümmungen sowie die ersten Ableitungen der geodätischen Krümmungen der Hauptkrümmungslinien laut folgender Bezeichnungen

$$\frac{d^2 D_1}{d\sigma_1^2} = \Phi', \qquad \frac{d}{d\sigma_1}\frac{1}{R_1} = \Psi', \qquad \frac{d^2 D_1}{d\sigma_{11}^2} = \Omega',$$

$$\frac{d^2 D_{11}}{d\sigma_1^2} = \Omega'', \qquad \frac{d}{d\sigma_{11}}\frac{1}{R_{11}} = \Psi'', \qquad \frac{d^2 D_{11}}{d\sigma_{11}^2} = \Phi''$$

und nenne Φ' bezw. Φ'' die direkte Abflachung längs der bezüglichen Krümmungslinie, Ω'' bezw. Ω' die transversale Abflachung längs der ersten bezw. zweiten Krümmungslinie, während Ψ' und Ψ'' lediglich die geodätischen Krümmungsasymmetrien sind.

Diese sechs Werthe bestimmen zusammen mit den Krümmungsasymmetrien, den Hauptkrümmungen und den Richtungscosinus der Normale sämmtliche Differentialquotienten der Flächengleichung bis einschliesslich der vierten Ordnung und umgekehrt.

Mit Ausnahme der zwischen den beiden transversalen Abflachungen bestehenden Relation

$$\Omega' - \Omega'' = D_1 D_{11}(D_1 - D_{11}) + \frac{V(2V - \overline{W}) - W(U - 2\overline{W})}{D_1 - D_{11}}$$

sind sie von einander unabhängig. Im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ ergeben sie sich aus folgenden Beziehungen:

$$\Phi' = \partial^{40} - 3r^3 + \frac{3v^2}{r - t}, \qquad \Omega'' = \partial^{22} - r^2 t - \frac{v(2v - w)}{r - t},$$

$$\Psi' = \frac{\partial^{31}}{r - t} - \frac{v(2u - 3w)}{(r - t)^2}, \qquad \Psi'' = -\frac{\partial^{13}}{r - t} + \frac{w(3v - 2u)}{(r - t)^2},$$

$$\Omega' = \partial^{22} - rt^2 - \frac{w(u - 2w)}{r - t}, \qquad \Phi'' = \partial^{04} - 3t^3 - \frac{3w^2}{r - t}$$

und es sind die übrigen Ableitungen derselben Ordnung:

$$\frac{dU}{d\sigma_{11}} = (D_1 - D_{11})\Psi' + \frac{2UV}{D_1 - D_{11}}, \qquad \frac{d\overline{W}}{d\sigma_1} = -(D_1 - D_{11})\Psi'' - \frac{2W\overline{W}}{D_1 - D_{11}},$$

$$\frac{dV}{d\sigma_1} = (D_1 - D_{11})\Psi' + \frac{V(U - W)}{D_1 - D_{11}}, \qquad \frac{dW}{d\sigma_{11}} = -(D_1 - D_{11})\Psi'' + \frac{W(V - \overline{W})}{D_1 - D_{11}},$$

$$\frac{d}{d\sigma_{11}}\frac{1}{R_1} = \frac{\Omega'}{D_1 - D_{11}} - \frac{V(V - \overline{W})}{(D_1 - D_{11})^2}, \qquad \frac{d}{d\sigma_1}\frac{1}{R_{11}} = -\frac{\Omega''}{D_1 - D_{11}} + \frac{W(U - W)}{(D_1 - D_{11})^2}$$

aus welchen letztgenannten Werthen unmittelbar das bekannte Gesetzt von LIOUVILLE:

$$\frac{d}{d\sigma_{II}}\frac{1}{R_I} + \frac{d}{d\sigma_I}\frac{1}{R_{II}} = D_I D_{II} + \frac{1}{R_I^2} + \frac{1}{R_{II}^2}$$

hervorgeht.

Die geometrische Bedeutung der Abflachungswerthe ist leicht darzustellen, wenn die Krümmungsasymmetrien gleich Null sind. Wenn direkte Abflachung und Hauptkrümmung verschiedenes Vorzeichen haben, mithin ein numerisches Maximum der Krümmung im gegebenen Punkte sich vorfindet, so ist $-\frac{\Phi}{D^3}$ das Quadrat der Excentricität derjenigen conischen Section, welche eine Berührung vierter Ordnung mit dem bezüglichen Hauptschnitte hat. Liegt aber ein numerisches Minimum der Krümmung vor, ist $\frac{\Phi}{\Phi + D^3}$ das Quadrat der Excentricität der Ellipse, welche im Punkte kleinster Krümmung eine Berührung vierter Ordnung mit dem bezüglichen Hauptschnitte hat. Sind auch die geodätischen Krümmungsasymmetrien gleich Null, und besteht die Identität

$$\frac{\Phi'}{D_I^2} + \frac{\Phi''}{D_{II}^2} = \frac{3(\Omega' + \Omega'')}{D_I D_{II}}$$

so stellen die in unendlich kleinem Abstande vom fraglichen Punkte parallel zur Tangentialebene geführten Schnitte der Fläche bis auf unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung als der vierten Ellipsen dar. Haben bei positiven Werthen der Hauptkrümmungen die transversalen Abflachungen höhere Werthe, als durch diese Relation angegeben wird, so ist das Flächenelement in den diagonalen Richtungen zwischen den Hauptnormalebenen relativ mehr zusammengebogen als ein solches, in welchem ein in der Nähe des Scheitelpunktes parallel zur Tangentialebene gelegter Schnitt eine Ellipse darstellt. Im entgegengesetzten Falle ist es in den genannten Richtungen relativ mehr ausgebogen. Eine vollständige Berührung vierter Ordnung mit dem Scheitelpunkte einer Fläche zweiten Grades erfordert das Bestehen der Beziehungen:

$$\frac{\Phi'}{D_I} = \frac{3\Omega''}{D_{II}}, \qquad \frac{\Phi''}{D_{II}} = \frac{3\Omega'}{D_I}.$$

Durch die angegebenen der Evolute angehörigen geometrischen Grössen lassen sich sämmtliche Differentialquotienten der Flächengleichung bis einschliesslich der vierten Ordnung im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ für eine beliebige Parallelfläche ermitteln.

II. Allgemeines über die Kreispunkte.

Da ein Kreispunkt niedrigster Ordnung erst dann vorliegt, wenn eine vollständige Berührung zweiter Ordnung mit einer Sphäre besteht, bezeichne ich allgemein einen Kreispunkt als von der Ordnung n, wenn die Fläche in ihm eine vollständige Berührung der Ordnung $n + 1$ mit einer Sphäre hat, d. h. wenn sämmtliche Differentialquotienten der Flächengleichung bis einschliesslich der Ordnung $n + 1$, nicht aber sämmtliche Differentialquotienten der Ordnung $n + 2$ mit denjenigen der Gleichung der osculirenden Sphäre identisch sind. Die Differentialquotienten der Flächengleichung der osculirenden Sphäre bezeichne ich mit $p_1 q_1 \ldots$ oder $\frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}, \ldots$.

Wird Krümmung und Bogenelement eines beliebigen Normalschnittes mit D bezw. ds bezeichnet, und setzt man zur Verkürzung

$$N = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

so gilt bekanntlich:

$$D = \frac{r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2}{N ds^2}.$$

Besteht nun eine vollständige Berührung der Ordnung $n + 1$ mit einer Sphäre, so sind, wie ersichtlich, sämmtliche Differentialquotienten der Normalschnittkrümmung bis einschliesslich der Ordnung $n - 1$ gleich Null, da durch $n - 1$ successive Differentiationen eine Gleichung erhalten wird, welche mit der für die osculirende Sphäre erhaltenen identisch ist. Die n-malige Differentiation muss aber ein von Null abweichendes Resultat geben, da nicht sämmtliche Differentialquotienten der Ordnung $n + 2$ in den Gleichungen der Fläche und der osculirenden Späre übereinstimmen. Wird diese Differentiation für beide Gleichungen ausgeführt, und dann die eine der so erhaltenen Gleichungen von der anderen subtrahirt, so erhält

man eine Gleichung, welche, da sie nur Differentialquotienten der Ordnung $n+2$ enthalten kann, im Coordinatensystem $p=q=0$ auf folgende Weise geschrieben werden kann:

$$\frac{d^n D}{ds_n} = \frac{d^{n+2}z - d^{n+2}z_1}{ds^{n+2}}.$$

Wird in dieser Gleichung dx und dy durch $dR\cos\vartheta$ bezw. $dR\sin\vartheta$ ersetzt, wobei eine Zunahme von ϑ eine Drehung des Normalschnittes um die Normale herum in der Richtung vom positiven Theil der X-Achse nach dem positiven Theile der Y-Achse zu bedeutet, so kann nach ϑ differentiirt werden, wonach dx und dy wieder eingeführt werden können. Aus einem beliebig herausgegriffenen Gliede z. B dem vierten

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3}\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n-1}\partial y^3}dx^{n-1}dy^3$$

erhält man auf diese Weise unter Berücksichtigung der Identitäten

$$\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n-1}\partial y^3} = \frac{\partial^{n+1}p}{\partial x^{n-2}\partial y^3} = \frac{\partial^{n+1}q}{\partial x^{n-1}\partial y^2}$$

die zwei Glieder

$$-(n+2)dy\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\frac{\partial^{n+1}p}{\partial x^{n-2}\partial y^3}dx^{n-2}dy^3$$

$$+(n+2)dx\frac{(n+1)n}{1.2}\frac{\partial^{n+1}q}{\partial x^{n-1}\partial y^2}dx^{n-1}dy^2$$

wonach leicht ersichtlich ist, dass die Differentiation der ganzen Gleichung ein Resultat geben muss, welches durch folgende Gleichung ausgedrückt werden kann:

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = (n+2)\frac{(d^{n+1}q - d^{n+1}q_1)dx - (d^{n+1}p - d^{n+1}p_1)dy}{ds^{n+2}}.$$

Wenn der Grad der Gleichung

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$$

welcher in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ durch $n+2$ ausgedrückt wird, eine gerade Zahl ist, so muss sie jedoch wenigstens zwei reelle Wurzeln haben, indem nämlich $\frac{d^n D}{ds^n}$ bei $\vartheta=\pi$ denselben Werth wie bei $\vartheta=0$ hat, mithin während

einer ganzen Umdrehung wenigstens ein Maximum und ein Minimum haben muss.

Setzt man $dy = 0$, so findet man für den im Coordinatensystem $p = q = 0$ mit der XZ-Ebene zusammenfallenden Normalschnitt unter Berücksichtigung, dass $\frac{\partial^{n+2} z_1}{\partial x^{n+2}}$ ein Produkt aus D^{n+1} und einem jederzeit aus der Gleichung der Sphäre durch successive Differentiationen zu ermittelnden Koefficienten k besteht,

$$\frac{d^n D}{ds^n} = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+2}} - kD^{n+1}, \qquad \frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = (n+2)\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1}\partial y}$$

und es ist mithin die Schnittlinie der Fläche mit der XZ-Ebene im Coordinatensystem $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1}\partial y}$ eine Linie $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$.

Die kürzeste Linie zwischen den Normalen in zwei unendlich wenig von einander entfernten Punkten auf einer Fläche muss senkrecht auf Beiden stehen, mithin die Tangente einer Parallelfläche sein. Werden die Coordinaten eines Punktes der Parallelfläche mit ξ, η, ζ, die Richtungscosinus der normale mit α, β, γ bezeichnet, so bestehen bekanntlich die Gleichungen

$$\xi = x + k\alpha, \qquad \eta = y + k\beta, \qquad \zeta = z + k\gamma$$

in welchen k eine Constante bedeutet. Werden diese Gleichungen differentiirt, dann quadrirt und addirt, und wird die so erhaltene Gleichung nach k differentiirt, so erhält man als Bedingung dafür, dass das Bogenelement $d\sigma$ auf der Parallelfläche ein Minimum sei, den Werth

$$k = -\frac{dx\,d\alpha + dy\,d\beta + dz\,d\gamma}{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}$$

welcher der Bedingung

$$d\xi\,dp + d\eta\,dq = 0$$

dass die kürzeste Linie Tangente einer asymptotischen Linie auf der fraglichen Parallelfläche sei, entspricht. Nach Einsetzen dieses Werthes erhält man schliesslich:

$$d\sigma = \frac{dq(dx + p\,dz) - dp(dy + q\,dz)}{\sqrt{(1 + q^2)dp^2 - 2pq\,dp\,dq + (1 + p^2)dq^2}}.$$

Bei einer vollständigen Berührung der Ordnung $n+1$ mit einer Sphäre ergeben $n-1$ successive Differentiationen dieser Gleichung den Werth Null. Nach Ausführung der n-maligen Differentiation sowohl für die Fläche als für die osculirende Sphäre erhält man durch Subtraktion für das Coordinatensystem $p = q = 0$

$$d^{n+1}\sigma = \frac{(d^{n+1}q - d^{n+1}q_1)dx - (d^{n+1}p - d^{n+1}p_1)dy}{\sqrt{dp^2 + dq^2}}$$

wonach bei einer vollständigen Berührung der Ordnung $n+1$ mit einer Sphäre bei $n > 0$ und wenn ϑ ein in der Tangentialebene belegener Winkel ist, allgemein

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = (n+2)D\frac{d^{n+1}\sigma}{ds^{n+1}}$$

ist, und der kürzeste Abstand zwischen den Normalen in zwei unendlich wenig von einander entfernten Punkten auf der Fläche ein Unendlichkleines höherer Ordnung ist, wenn die Punkte auf einer Linie $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ liegen, als sonst.

Wenn man in den allgemeinen Ausdruck für die Torsion einer doppelt gekrümmten Linie — x als unabhängige Variabele betrachtet —

$$\frac{dx(d^2zd^3y - d^3zd^2y)}{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (d^2y)^2dx^2 + (d^2z)^2dx^2}$$

den aus der allgemeinen Gleichung einer geodätischen Linie

$$p(dyd^2z - dzd^2y) - qdxd^2z - dxd^2y = 0$$

ermittelten Werth für d^2y sowie den durch Differentiation dieser Gleichung gefundenen Werth für d^3y einsetzt, so ergiebt sich als allgemeiner Ausdruck für die geodätische Torsion einer Linie auf einer Fläche:

$$T = -\frac{dq(dx + pdz) - dp(dy + qdz)}{N^2ds^2}$$

aus welchem Ausdrucke durch Zusammenstellung mit dem eben gefundenen das allgemeingiltige Gesetz

$$\frac{d\sigma}{ds} = \pm\frac{T}{\sqrt{D^2 + T^2}}$$

hervorgeht, und nach schon angewendeter Methode die für eine vollständige Berührung der Ordnung $n+1$ mit einer Sphäre allgemein geltende Beziehung

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = -(n+2)\frac{d^n T}{ds^n}$$

hergeleitet werden kann, wobei ϑ wie früher, den Winkel zwischen der bezüglichen Normalebene und einer fixen Tangente bedeutet.

Die Bedingung, dass die Normalen längs einer Linie auf der Fläche eine Linie berühren, d. h. eine abwickelbare Fläche darstellen:

$$d\xi + p d\zeta = 0, \qquad d\eta + q d\zeta = 0$$

ergiebt zusammen mit den beiden Normalengleichungen

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0, \qquad \eta - y + q(\zeta - z) = 0$$

nach Differentiation dieser

$$\zeta - z = \frac{dx + p dz}{dp} = \frac{dy + q dz}{dq}$$

wonach die Definition der Hauptkrümmungslinien als Schnittlinien der Fläche mit den Abwickelbaren Normalflächen oder als Linien ohne geodätische Torsion oder durch die Forderung, dass der kürzeste Abstand zwischen den Normalen in zwei unendlich wenig von einander entfernten Punkten auf der Fläche ein Unendlichkleines höherer Ordnung sei, wenn diese Punkte auf eine Hauptkrümmungslinie liegen, als sonst, eine und dieselbe ist, und in einen Kreispunkt n^{ter} Ordnung nur längs den Linien $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ Krümmungslinien eintreten können. Da mithin eine Orthogonalität dieser Linien im allgemeinen nicht im Kreispunkt besteht, nenne ich bei der weiteren Untersuchung eine durch den Kreispunkt gehende Krümmungslinie eine s-Linie ohne Rücksicht darauf, ob sie nach beiden Seiten vom Kreispunkte einer und derselben Schaar angehöre oder nicht, und die diese Linie ausserhalb des Kreispunkts rechtwinkelig schneidenden Krümmungslinien die t-Linien der Fläche, während die entsprechenden Hauptkrümmungen mit D_s bezw. D_t bezeichnet werden. Von den beiden Berührungslinien der einer s-Linie der Fläche entsprechenden abwickelbaren

Normalfläche mit der Krümmungsmittelpunktsfläche, welche sich im Krümmungsmittelpunkt des Kreispunkts treffen müssen, nenne ich diejenige, welche zugleich Kantlinie der abwickelbaren Normalfläche ist, die s-Linie, die andere die t-Linie dieser.

Mittels den eben angeführten, für die Kantlinie geltenden Gleichungen kann man den Werth von D_s in geeigneter Form erhalten, wonach durch Subtraktion dieses Werthes vom bekannten Werthe

$$\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{N^3}$$

für die Summe der beiden Hauptkrümmungen auch D_t in geeigneter Form erhalten wird. Man findet auf diese Weise, wenn $\frac{dy}{dx}$ mit λ bezeichnet wird:

$$D_s = \frac{(1+q^2)r - pqs + \lambda[(1+q^2)s - pqt]}{N^3},$$

$$D_t = \frac{(1+p^2)t - pqs - \lambda[(1+q^2)s - pqt]}{N^3}.$$

Aus diesen Werthen ergiebt sich allgemein für einen Kreispunkt n^{ter} Ordnung im Coordinatensystem $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1} \partial y} = 0$ und für $\lambda = 0$ d. h. für eine die X-Achse berührende Krümmungslinie:

$$d^n D_s = d^n r - d^n r_1 = \left(\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+2}} - \frac{\partial^{n+2} z_1}{d x^{n+2}}\right) ds^n,$$

$$d^{n+1} D_s = d^{n+1} r - d^{n+1} r_1 = \left(\frac{\partial^{n+3} z}{\partial x^{n+3}} - \frac{\partial^{n+3} z_1}{\partial x^{n+3}}\right) ds^{n+1},$$

$$d^n D_t = d^n t - d^n t_1 = \left(\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^n \partial y^2} - \frac{\partial^{n+2} z_1}{\partial x^n \partial y^2}\right) ds^n,$$

$$d^{n+1} D_t = d^{n+1} t - d^{n+1} t_1 = \left(\frac{\partial^{n+3} z}{\partial x^{n+1} \partial y^2} - \frac{\partial^{n+3} z_1}{\partial x^{n+1} \partial y^2} + \frac{(n+1)n}{2} \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n-1} \partial y^3} \frac{d^2 y}{dx^2}\right) ds^{n+1}.$$

Verschwindet bei partieller Berührung höherer Ordnung als $n+1$ mit der osculirenden Sphäre der eine oder andere dieser Werthe, so kann natürlich die Differentiation beliebig fortgesetzt werden, aber die Resultate lassen sich nicht länger so einfach ausdrücken.

Unter den genannten Bedingungen ergiebt sich für die Kantlinie der abwickelbaren Fläche durch die die Projektion des Krümmungshalbmessers auf die Z-Achse ausdrückende Beziehung

$$N(\zeta - z)D_s = 1$$

die Relation

$$d^n\zeta = -\frac{1}{D_s^2}d^n D_s,$$

und mittels der Gleichungen $d\xi + pd\zeta = 0$, $d\eta + qd\zeta = 0$:

$$d^n\xi = d^n\eta = d^{n+1}\eta = 0,$$

$$d^{n+1}\xi = \frac{n}{D_s}d^n D_s ds.$$

Für die t-Linie der abwickelbaren Normalfläche findet man nach derselben Methode:

$$d^n\zeta = -\frac{1}{D_t^2}d^n D_t$$

und unter Anwendung der Normalgleichungen:

$$d^n\xi = d^n\eta = d^{n+1}\eta = 0,$$

$$d^{n+1}\xi = [(n+1)d^n D_t - d^n D_s]\frac{ds}{D_t}.$$

Im allgemeinen Falle berührt also auch die t-Linie die Kreispunktsnormale, und zwar liegen, wenn n eine ungerade Zahl ist, beide Linien jede für sich ganz nach der einen Seite von der Kreispunktsnormale, während sie im entgegengesetzten Falle eine Spitze im Krümmungsmittelpunkt des Kreispunkts haben und, jede für sich, ganz nach der einen Seite der durch diesen Punkt parallel zur Tangentialebene der Fläche gelegten Ebene belegen sind.

Ist bei partieller Berührung höherer Ordnung als $n+1$ mit der osculirenden Sphäre m bezw. μ die Ordnungszahl des ersten Differentialquotienten von D_s bezw. D_t, welcher einen von Null verschiedenen Werth hat, und ist dabei $m \geqq \mu > n$ oder $\mu \geqq m > n$, so sage ich, der Kreispunkt ist längs der fraglichen Krümmungslinie von der Ordnung μ bezw. m, indem diese Zahlen die bezüglichen Ordnungszahlen des ersten von Null verschiedenen Differentialquotienten von $D_s - D_t$ sind, und letztgenannte Ordnungszahl

überhaupt, auch wenn $m = \mu = n$ ist, die partielle Ordnungszahl des Kreispunkts längs der fraglichen Krümmungslinie angiebt. Der genannte Fall, wo die Ordnungszahl nicht nur des Kreispunkts, sondern auch der Osculation mit der Sphäre längs der fraglichen Krümmungslinie grösser als n bezw. $n + 1$ ist, stellt einen speciellen Fall dar, den ich nicht in dieser allgemeinen Darstellung berücksichtigen kann. Ist nur die Ordnungszahl des Kreispunkts erhöht, dabei aber $m = \mu = n$, so sind die erhaltenen Werthe für die s- und t-Linie der abwickelbaren Normalfläche übereinstimmend, und die beiden Linien haben eine entsprechende Berührung. Besteht wiederum nur eine partielle Osculation höherer Ordnung mit der Sphäre, so wird dadurch nur der Typus der s-Linie geändert, und ist $\mu > m$ bei $m = n$, so bildet die Tangente der t-Linie im Krümmungsmittelpunkt des Kreispunkts einen endlichen Winkel mit der Kreispunktsnormale, wobei diese Linie, wenn n eine ungerade Zahl ist, mit einer Spitze die convexe Seite der s-Linie berührt, im entgegengesetzten Falle aber die Kreispunktsnormale schneidet und von der Spitze der s-Linie berührt wird.

Die Polare einer die fragliche s-Linie auf der Fläche kreuzenden t-Linie fällt mit der Tangente im entsprechenden Punkte der t-Linie der abwickelbaren Normalfläche zusammen, was wenn $\frac{1}{R_t}$ die geodätische Krümmung jener t-Linie ist durch das allgemein gültige Gesetz

$$R_t \frac{dD_t}{ds} = D_t - D_s$$

ausgedrückt wird. Im allgemeinen Falle erhält man nach $n - 1$ successiven Differentiationen dieser Gleichung:

$$R_t = 0$$

und durch die n-malige:

$$\frac{dR_t}{ds} = \frac{d^n D_t - d^n D_s}{n d^n D_t}.$$

Ist die partielle Ordnungszahl ν des Kreispunkts längs der fraglichen Krümmungslinie grösser als μ, so erhält man:

$$R_t = dR_t = d^2 R_t = \ldots = d^{\nu-\mu} R_t = 0,$$

$$d^{\nu-\mu+1} R_t = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (\nu - \mu + 1)}{\nu(\nu - 1)(\nu - 2) \ldots \mu} \frac{d^\nu D_t - d^\nu D_s}{d^\mu D_t} ds$$

sonst ergeben sich bei $\nu = \mu$ ähnliche Werthe wie im allgemeinen Falle (auch wenn $\nu > n$ ist) und bei $m > \mu$:

$$\frac{dR_t}{ds} = \frac{1}{\mu}$$

während im Falle $\mu > m$ durch den Ausdruck

$$\frac{1}{R_t} = -\frac{d^{m+1} D_t}{d^m D_t ds}$$

der Limeswerth der geodätischen Krümmung der t-Linien der Fläche bei Eintritt der fraglichen s-Linie in den Kreispunkt angegeben wird.

Mit diesen Werthen lassen sich unter Anwendung des S. 64 angeführten LIOUVILLE'schen Satzes, dem man bei $R_t = \frac{1}{\infty}$ am geeignetsten die Form

$$R_t^2 \frac{d}{dt} \frac{1}{R_s} = \frac{dR_t}{ds} + 1 + R_t^2 \left(\frac{1}{R_s^2} + D_s D_t \right)$$

giebt, die Verlaufstypen der collateralen Krümmungslinien einer in den Kreispunkt eintretenden s-Linie bestimmen. Wenn nämlich die geodätische Krümmung $\frac{1}{R_s}$ der fraglichen s-Linie keinen unendlich grossen Werth hat, erhellt es, dass bei Abnahme von R_t nach Null hin die der fraglichen s-Linie am nächsten verlaufenden Krümmungslinien derselben Schaar, d. h. ihre collateralen Krümmungslinien, ihr die convexe bezw. concave Seite zuwenden müssen, je nachdem $\frac{dR_t}{ds} + 1$ positiv oder negativ ist. Da nun zugleich die Tangenten dieser collateralen s-Linien Normalen der t-Linien sind, so findet man, dass bei Eintritt einer Krümmungslinie ohne unendlich grosser geodätischer Krümmung in den Kreispunkt im allgemeinen Falle, wo R_t nach Null hin abnimmt, die collateralen s-Linien bei $\frac{dR_t}{ds} > 0$ mit divergirenden Tangenten ihre convexe Seite der fraglichen s-Linie zukehren, bei $\frac{dR_t}{ds} + 1 > 0 > \frac{dR_t}{ds}$ ihre convexe Seite der fraglichen s-Linie zukehren, während die Tangenten nach einem zwischen der t-Linie und dem Kreispunkt gelegenen Punkt convergiren, bei $\frac{dR_t}{ds} + 1 < 0$ schliesslich die concave Seite der fraglichen s-Linie zukehren, während die Tangenten nach

einem jenseits des Kreispunkts belegenen Punkt convergiren. Ich nenne den Verlauf der collateralen s-Linien in diesen drei Fällen *ausbiegend, anschmiegend* bezw. *umbiegend,* wodurch zwar von den anschmiegenden collateralen Krümmungslinien gesagt ist, dass sie längs der Tangente der fraglichen s-Linie zusammen mit dieser in den Kreispunkt eintreten, aber vom weiteren Verlauf der in Bezug auf eine in den Kreispunkt eintretende Krümmungslinie aus- bezw. umbiegenden collateralen Krümmungslinien nichts ausgesagt sein soll. Im Falle $\frac{dR_t}{ds} = 0$ wobei also $\nu > \mu$ ist, ergiebt sich, wenn $\nu - \mu$ eine gerade Zahl ist, ein anschmiegender bezw. ausbiegender Verlauf der collateralen Krümmungslinien, je nachdem $d^{\nu-\mu+1} R_t$ negatives oder positives Vorzeichen hat, während im entgegengesetzten Falle dies nur für den positiven Theil der s-Linie gilt, längs dem negativen Theile aber die collateralen Krümmungslinien den anderen dieser Verlaufstypen aufweisen. Der Fall $\frac{dR_t}{ds} + 1 = 0$, in welchem die t-Linie der abwickelbaren Normalfläche eine Berührung höherer Ordnung mit der Kreispunktsnormale hat, wird weiter unten berücksichtigt werden. Hat R_t einen endlichen Limeswerth, unterscheidet sich der Verlauf der collateralen Krümmungslinien nicht von dem beim allgemeinen Flächenpunkte.

Daraus, dass Krümmungslinien nur längs den Linien $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ in einen Kreispunkt eintreten können, folgt natürlich nicht, dass dies längs allen solchen Linien der Fall sei. Es hat zwar für einen Kreispunkt n^{ter} Ordnung die n-malige Differentiation der Differentialgleichung

$$(1 + p^2)s - pqr + \lambda[(1 + p^2)t - (1 + q^2)r] + \lambda^2[pqt - (1 + q^2)s] = 0$$

für die Hauptkrümmungslinien die Werthe von λ gegeben, es müssen aber auch sämmtliche successiven Differentiationen höherer Ordnung reelle Werthe für $d\lambda$, $d^2\lambda$ u. s. w. ergeben. Im allgemeinen Flächenpunkte ist das immer der Fall, da im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ bei $\lambda = 0$ ein Differential beliebiger Ordnung $d^m\lambda$ immer erst in der durch die m-malige Differentiation erhaltene Gleichung auftritt und zwar mit dem Coefficienten $t - r$. Auf ähnliche Weise tritt derselbe Differentialquotient im Kreispunkte n^{ter} Ordnung und im Coordinatensystem $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1}\partial y} = 0$ bei

$\lambda = 0$ immer erst in der durch die $(n+m)$-malige successive Differentiation erhaltenen Gleichung auf, aber mit dem Coefficienten:

$$\frac{(n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots m}\left[\frac{n+m+1}{m+1}\left(\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^n \partial y^2}-\frac{\partial^{n+2}z_1}{\partial x^n \partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n+2}}-\frac{\partial^{n+2}z_1}{\partial x^{n+2}}\right)\right]$$

welcher theils aus der Differentiation des Produktes $\lambda(t-r)$ theils aus dem Differentialquotienten $d^{n+m}s$ stammt. In den Fällen wo ein solcher Coefficient gleich Null ist, tritt entweder die fragliche Krümmungslinie unter Bildung einer Spitze im Kreispunkt ein, oder es können die betreffenden Differentialquotienten von Gleichungen höherer Ordnung bestimmt werden, wobei die fragliche Krümmungslinie imaginär sein kann, oder mehrere Krümmungslinien längs derselben Tangente eintreten können. Solche Verhältnisse können aber nur vorliegen, wenn sowohl $\frac{d^n D_s}{ds^n}$ als $\frac{d^n D_t}{ds^n}$ gleich Null sind, d. h. wenn längs der fraglichen Linie $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ die Ordnungszahl nicht nur des Kreispunkts sondern auch der Osculation mit einer Sphäre höher als n bezw. $n+1$ ist, und eben darum eignen sich diese Fälle nicht für eine allgemeine Untersuchung. Diese Fälle ausgenommen, kann ersichtlicherweise in den durch beliebig wiederholte successive Differentiationen erhaltenen Gleichungen nur dann (und zwar nur in einer Gleichung) der Coefficient des betreffenden Differentiales von λ Null werden, wenn die Bedingung $(n+1)\frac{d^n D_t}{ds^n} \gtrless \frac{d^n D_s}{ds^n} \gtrless \frac{d^n D_t}{ds^n} \gtrless 0$ erfüllt ist, d. h. wenn die fragliche in den Kreispunkt eintretende Krümmungslinie ohnehin von anschmiegenden Krümmungslinien begleitet ist. In allen anderen Fällen tritt längs einer Linie $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ eine und nur eine Krümmungslinie in den Kreispunkt ein, und für diese kann weder die geodätische Krümmung, welche laut dem angegebenen Ausdruck den Werth

$$\frac{1}{R_s} = \frac{2\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n+1}\partial y}}{(n+1)\left(2\frac{d^n D_s}{ds^n}-(n+2)\frac{d^n D_t}{ds^n}\right)}$$

hat, noch irgend eine der successiven Ableitungen derselben einen unendlich grossen Werth haben, falls Kanten und Spitzen auf der untersuchten Fläche ausgeschlossen sind, was stillschweigend angenommen worden ist.

Es folgt hieraus, dass umbiegende collaterale Krümmungslinien nur dann vorkommen, wenn $\frac{d^n D}{ds^n}$ als Funktion von ϑ ein numerisches Maximum in der fraglichen s-Linie hat, anschmiegende nur, wenn ein numerisches Minimum vorliegt, während ausbiegende collaterale Krümmungslinien ein numerisches Minimum bezw. Maximum angeben, je nachdem das Produkt $\frac{d^n D_s}{ds^n}\frac{d^n D_t}{ds^n}$ positiven oder negativen Werth hat.

Da die Gleichung $\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ von derselben Gradzahl ist wie die Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ mithin die Anzahl ihrer Wurzeln nicht grösser als diese Gradzahl sein kann, so erhellt es, dass eine in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinie, für welche $\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ d. h. $\frac{dR_t}{ds} + 1 = 0$ ist, ein Zusammenfallen von wenigstens zwei Wurzeln der letzterwähnten Gleichung repräsentiren muss. Ist die Anzahl der zusammenfallenden Wurzeln ungerade, so stellt die Linie wieder eine Linie $\frac{d^n D}{ds^n} =$ Max. bezw. Min. dar und hat dementsprechend umbiegende bezw. anschmiegende collaterale Krümmungslinien. Im anderen Falle sind die collateralen Krümmungslinien auf der Seite zunehmender bezw. abnehmender ϑ anschmiegend bezw. umbiegend, je nachdem $\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{d^n D}{ds^n}$ dasselbe Vorzeichen wie $\frac{d^n D}{ds^n}$ hat oder entgegengesetztes, auf der anderen Seite umgekehrt. Da, abgesehen von diesen, ein Zusammenfallen von wenigstens zwei Wurzeln der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ repräsentirenden Linien, $\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{d^n D}{ds^n}$ von Linie zu Linie Vorzeichen wechselt, da weiter anschmiegende collaterale Krümmungslinien der Bedingung $\left((n+1)\frac{d^n D_t}{ds^n} - \frac{d^n D_s}{ds^n}\right)\left(\frac{d^n D_s}{ds^n} - \frac{d^n D_t}{ds^n}\right) > 0$ entsprechen, und das Vorzeichen der Differenz $\frac{d^n D_s}{ds^n} - \frac{d^n D_t}{ds^n}$ entscheidet, welcher Schaar eine Krümmungslinie angehört, so ist es ersichtlich, was a priori postulirt werden könnte, dass wenn zwei consecutive Krümmungslinien einer und derselben Schaar angehören, die eine anschmiegende collaterale Krümmungslinien hat und umgekehrt, sowie die Unmöglichkeit des Vorkommens von zwei consecutiven Krümmungslinien, welche beide anschmiegende collaterale Krümmungslinien hätten, daraus hervorgeht, dass dieser Typus einem numerischen

Minimum von $\frac{d^n D}{ds^n}$ als Funktion von ϑ entspricht. Ein Gebiet, in welchem Krümmungslinien längs gemeinsamer Tangente in einen Kreispunkt einlaufen, oder ein offenes Nodalgebiet der Autoren, ist also immer durch eine Krümmungslinie, längs welcher innerhalb des fraglichen Gebietes keine anschmiegende Krümmungslinien eintreten, beiderseits abgegrenzt, und es stellt das erwähnte Verhalten bei einer Linie $\frac{dR_t}{ds} + 1 = 0$ nur eine scheinbare Ausnahme von dieser Regel dar, indem die eine Grenzlinie des offenen Nodalgebietes mit den einlaufenden Krümmungslinien gemensame Tangente hat.

Zu den angeführten Hilfsmitteln um die Krümmungslinienfigur eines Kreispunkts zu untersuchen kann noch der Limeswerth der geodätischen Krümmungssymmetrie einer die s-Linie in unendlich kleinem Abstande vom Kreispunkt schneidenden t-Linie gefügt werden. Aus dem im allgemeinen Flächenpunkte giltigen Werthe

$$\Psi'' = -\frac{\partial^{12}}{r-t} + \frac{w(3v-2\dot{u})}{(r-t)^2}$$

erhält man bei unendlich kleinem Werthe von R_t:

$$\frac{dR_t}{dt} = -R_t^2 \frac{d}{dt}\frac{1}{R_t} = \frac{2u}{w} = \frac{2W}{W}$$

welcher Ausdruck, da im Kreispunkte n^{ter} Ordnung

$$\frac{d^{n-1}W}{ds^{n-1}} = \frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}} = \frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n-1}\partial y^3}$$

sein muss, weil die Differentialquotienten niedrigerer Ordnung der Normalschnittkrümmung gleich Null sind, durch Differentiation von Zähler und Nenner den Limeswerth

$$\frac{dR_t}{dt} = \frac{2\frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n-1}\partial y^3}}{\frac{d^n D_t}{ds^n}}$$

ergiebt.

Die angeführten Eigenschaften der s- und t-Linien der abwickelbaren Normalflächen reichen im allgemeinen dazu aus, die gestaltlichen Verhält-

nisse der Evolute hinreichend kennen zu lernen. Für die einfacheren Kreispunktstypen kann man noch die Schnittlinien der Evolute mit der durch den Krümmungsmittelpunkt des Kreispunkts parallel zur Tangentialebene gelegten Ebene hinzuziehen, deren Tangenten bei Kreispunkten erster Ordnung durch eine quadratische, bei solchen Kreispunkten zweiter Ordnung, welche Schnittpunkte zweier auf der bezüglichen Fläche verlaufenden Symmetrielinien sind, durch eine als quadratische auflösbare Gleichung vierten Grades angegeben werden.

Durch Differentiation von Zähler und Nenner im allgemeinen Ausdruck für das Krümmungsmass der Evolute findet man, dass das Vorzeichen des Krümmungsmasses bei unendlich kleiner Differenz der Hauptkrümmungen dem Vorzeichen des Produktes $\frac{d^n D_s}{ds^n} \frac{d^n D_t}{ds^n}$ entgegengesetzt ist, was für den Theil der Evolute gilt auf welchem die s-Linie einer abwickelbaren, die Kreispunktsnormale enthaltenden, Fläche eine geodätische Linie ist.

Für eine mit einer t-Linie der abwickelbaren Normalfläche zusammenfallenden Kante entscheidet der Limeswerth des für den allgemeinen Flächenpunkt giltigen Ausdruckes

$$\Phi'' = \partial^{04} - 3t^3 - \frac{3w^2}{r - t}$$

ob sie nach der Fläche schaut oder nicht. Da die beiden ersten Glieder zusammen die Abflachung des auf der fraglichen s-Linie senkrechten Normalschnittes bedeuten, welche mit φ' bezeichnet werden mag, so kann dieser Ausdruck allgemein als eine Gleichung

$$\Phi' = \varphi' + \frac{3W}{R_t}$$

zwischen rein geometrischen vom Coordinatensystem unabhängigen Grössen geschrieben werden. Man ersieht, dass in den Kreispunkten erster Ordnung Φ' beim Durchgang der fraglichen s-Linie durch den Kreispunkt einen unendlich grossen Werth erhält und das Vorzeichen wechselt. Für diesen Fall setzt man am geeignetsten

$$\frac{1}{\Phi'} = \frac{R_t}{3W + R_t\varphi'}$$

und erhält durch Differentiation:

$$d\frac{1}{\Phi^t} = \frac{dR_t}{3W} = \frac{\frac{dD_t}{ds} - \frac{dD_s}{ds}}{3\left(\frac{dD_t}{ds}\right)^2} ds.$$

Für die Kreispunkte zweiter Ordnung erhält man den Limeswerth

$$\Phi^t = \varphi^t + \frac{6\left(\frac{d^2D_t}{ds^2}\right)^2}{\frac{d^2D_t}{ds^2} - \frac{d^2D_s}{ds^2}}$$

und für solche höherer Ordnung nach $n-1$ Differentiationen allgemein:

$$(n-1)\,dR_t d^{n-2}(\Phi^t - \varphi^t) = 3d^{n-1}W$$

mithin:

$$\frac{d^{n-2}\Phi^t}{ds^{n-2}} = \frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n-2}\partial y^4} - \frac{\partial^{n+2}z_1}{\partial x^{n-2}\partial y^4} + \frac{3n}{n-1}\frac{\left(\frac{d^nD_t}{ds^n}\right)^2}{\frac{d^nD_t}{ds^n} - \frac{d^nD_s}{ds^n}}.$$

Mit den angegebenen Hilfsmitteln können nun die gestaltlichen Verhältnisse sowohl der Krümmungslinien wie der Evolute eines Kreispunktes beliebiger Ordnung untersucht werden, wenn die betreffenden Differentialquotienten der Flächengleichung bekannt sind, indem nach numerischer Auflösung der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^nD}{ds^n} = 0$ in den verschiedenen Coordinatensystemen $p = q = \frac{\partial^{n+2}z}{\partial x^{n+1}\partial y} = 0$ die bezüglichen Werthe $\frac{d^nD_s}{ds^n}$, $\frac{d^nD_t}{ds^n}$ ermittelt werden. Für eine allgemeinere Untersuchung von besonderen Kreispunktstypen giebt es aber bequemere Mittel. So genügt z. B. die Kenntniss der Wurzeln der Gleichung $\frac{d^nD}{ds^n} = 0$ um das Vorzeichen von $\frac{d^nD_s}{ds^n}$ für jede der Linien $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^nD}{ds^n} = 0$ zu bestimmen. Um Ähnliches auch betreffs $\frac{d^nD_t}{ds^n}$ und der Differenz $\frac{d^nD_s}{ds^n} - \frac{d^nD_t}{ds^n}$ erreichen zu können, kann man auf folgende Weise verfahren. Nach derselben Methode wie die Gleichung für $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^nD}{ds^n}$

kann eine Gleichung für $\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{d^n D}{ds^n}$ erhalten werden. Mittels der leicht zu constatirenden Identitäten

$$\frac{d}{d\vartheta}(d^{n+1}p - d^{n+1}p_1) = (n+1)[(d^n s - d^n s_1)dx - (d^n r - d^n r_1)dy],$$

$$\frac{d}{d\vartheta}(d^{n+1}q - d^{n+1}q_1) = (n+1)[(d^n t - d^n t_1)dx - (d^n s - d^n s_1)dy]$$

und der schon beviesenen Relation

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{d^n D}{ds^n} = (n+2)\left((n+1)\frac{d^n D_t}{ds^n} - \frac{d^n D_s}{ds^n}\right)$$

erhält man die Gleichung

$$d^n D_t = \frac{(d^n t - d^n t_1)dx^2 - 2(d^n s - d^n s_1)dx dy + (d^n r - d^n r_1)dy^2}{ds^2}$$

wonach unter Anwendung der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ in folgender Form

$$(d^n s - d^n s_1)(dx^2 - dy^2) = (d^n r - d^n r_1 - d^n t + d^n t_1)dx dy$$

für jede beliebige Krümmungslinie die Gleichung

$$d^n D_s - d^n D_t = (d^n r - d^n r_1 - d^n t + d^n t_1)\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2 - dy^2} = (d^n s - d^n s_1)\frac{dx^2 + dy^2}{dx dy}$$

besteht, in welcher $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ zu erhalten ist.

Zum Schlusse dieses Capitels mag es mir gestattet sein die Eigenschaften der Krümmungslinien im allgemeinen Flächenpunkte den hier bewiesenen Eigenschaften im Kreispunkte zusammenfassend gegenüberzustellen.

Wenn allgemein Krümmung, geodätische Torsion und Bogenlänge einer Normalschnittlinie der Fläche bezw. der kürzeste Abstand zwischen den Flächennormalen in zwei auf dieser Linie belegenen Punkten mit D, T und s bezw. σ bezeichnet werden, und ϑ den Winkel zwischen der

Tangente der Normalschnittlinie und einer fixen Tangente bedeutet, so gelten für den allgemeinen Flächenpunkt die Beziehungen

$$\frac{dD}{d\vartheta} = -2T, \qquad \frac{d\sigma}{ds} = \pm \frac{T}{\sqrt{D^2 + T^2}}$$

und es ist im Coordinatensystem $p = q = 0$ für die die Coordinatenachsen berührenden Normalschnittlinien

$$\frac{dD}{d\vartheta} = \pm 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

wobei das obere Zeichen für die die X-Achse, das untere für die die Y-Achse berührende Linie gilt. Im Kreispunkt n^{ter} Ordnung, in welchem mithin eine vollständige Berührung der Ordnung $n + 1$ mit der osculirenden Sphäre besteht, sind diese sowie die, sämmtlichen successiven Ableitungen bis einschliesslich der Ordnung $n - 1$ entsprechenden, Werthe gleich Null und es bestehen die Relationen

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = -(n+2)\frac{d^n T}{ds^n}, \qquad \frac{d^{n+1}\sigma}{ds^{n+1}} = \pm \frac{\frac{d^n T}{ds^n}}{\sqrt{D^2 + T^2}}$$

wobei im Coordinatensystem $p = q = 0$ für die die X-Achse bezw. die Y-Achse berührende Normalschnittlinie

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = (n+2)\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1}\partial y} \quad \text{bezw.} \quad \frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = -(n+2)\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x \partial y^{n+1}}$$

ist.

Die Krümmungslinien, oder die ohne geodätische Torsion auf der Fläche verlaufenden Linien, oder die Schnittlinien der Fläche mit ihren abwickelbaren Normalflächen, haben allgemein die Eigenschaft, dass der kürzeste Abstand der Flächennormalen in zwei unendlich wenig von einander entfernten Punkten, wenn diese Punkte auf einer Krümmungslinie liegen, ein Unendlichkleines höherer Ordnung darstellt, als sonst. Im allgemeinen Flächenpunkt verlaufen sie in den durch eine Gleichung zweiten Grades bestimmten Richtungen $\frac{dD}{d\vartheta} = 0$ und werden im Coordinatensystem $p = q = s = 0$ von den Coordinatenachsen berührt. Im Kreispunkte n^{ter} Ordnung verlaufen sie in den durch eine Gleichung vom Grade $n + 2$

bestimmten Richtungen $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ und es wird in jedem Coordinatensystem $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1}\partial y} = 0$ bezw. $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x \partial y^{n+1}} = 0$ eine Krümmungslinie von der X-Achse bezw. von der Y-Achse berührt.

Wie ersichtlich, würden die Gesetze für den allgemeinen Flächenpunkt in den für die Kreispunkte geltenden enthalten sein, wenn man den allgemeinen Flächenpunkt als Kreispunkt von der Ordnung Null und eine Funktion als ihre eigene Ableitung von der Ordnung Null bezeichnen dürfte.

Unter dieser Bedingung würde übrigens der im Kreispunkt geltende Werth für die geodätische Krümmung einer eintretenden Krümmungslinie auch im allgemeinen Flächenpunkte die Giltigkeit behalten.

III. Die wichtigsten Kreispunktstypen.

1. *Kreispunkte erster Ordnung.*

Es mag allgemein als eine Linie $u = 0$ bezw. eine Linie $w = 0$ u. s. w. eine Linie bezeichnet werden, welche in einem Coordinatensystem $p = q = u = 0$ bezw. in einem Coordinatensystem $p = q = w = 0$ u. s. w. mit der X-Achse zusammenfällt. Die Krümmungslinien sind also die Linien $v = 0$ deren Orientation durch die Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{dD_s}{ds} = 0$ angegeben wird, welche folgende Form hat

$$v dx^3 - (u - 2w) dx^2 dy + (u - 2v) dx dy^2 - w dy^3 = 0$$

und in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$ für die Orientirung der beiden übrigen Haupttangenten die quadratische Gleichung

$$w \operatorname{tg}^2 \vartheta - u \operatorname{tg} \vartheta + u - 2w = 0$$

giebt, in welcher $\frac{dy}{dx}$ mit $\operatorname{tg}\vartheta$ bezeichnet ist.

Für die die X-Achse in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$ berührende Hauptkrümmungslinie haben wir nun, indem wir die mit den Bezeichnungen im allgemeinen Flächenelemente analogen Bezeichnungen

$$\frac{dD_s}{ds} = U, \qquad \frac{dD_t}{ds} = W, \qquad \frac{d^2 D_s}{ds^2} = \Phi, \qquad \frac{d^2 D_t}{ds^2} = \Omega$$

einführen, laut obigen Deductionen:

$$U = u, \qquad W = w, \qquad \Phi = \partial^{40} - 3r^3, \qquad \Omega = \partial^{22} - r^3 + \frac{w\partial^{31}}{2u - 3w},$$

$$\frac{1}{R_s} = \frac{\partial^{31}}{2u - 3w}, \qquad \frac{dR_t}{ds} = \frac{w - u}{w} = \frac{W - U}{W}.$$

Die Krümmung der s- bezw. t-Linie der abwickelbaren Normalfläche deren Schnittlinie mit der Fläche die fragliche Krümmungslinie darstellt, welche mit $\frac{1}{R^s}$ bezw. $\frac{1}{R^t}$ bezeichnet werden mag, ist:

$$\frac{1}{R^s} = \frac{r^2}{u} = \frac{D^2}{U}, \qquad \frac{1}{R^t} = -\frac{r^2(u - 2w)}{w^2} = -\frac{D^2(U - 2W)}{W^2}.$$

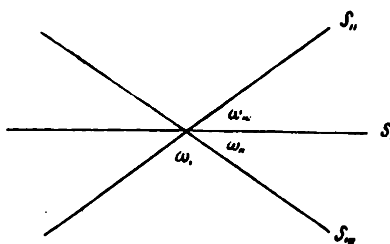


Fig. 1.

Es mögen weiter nach dem Schema der Fig. 1 die positiven Richtungen der drei möglichen Krümmungslinien mit $s_1\ s_{11}\ s_{111}$ und die zwischen ihnen gebildeten, immer positiv gerechneten Winkel mit $\omega_1\ \omega_{11}\ \omega_{111}$ sowie die Werthe, welche $u\ w\ \frac{dR_t}{ds}$ u. s. w. annehmen, wenn der positive Theil der betreffenden Hauptkrümmungslinie mit dem positiven Theile der X-Achse zusammenfällt mit $u_1 u_{11}\ w_1 w_{11}\ \frac{dR_t}{ds_1} \frac{dR_t}{ds_{11}}$ u. s. w. bezeichnet werden.

Aus der S. 82 angegebenen Gleichung

$$d^n D_s - d^n D_t = (d^n s - d^n s_1) \frac{dx^2 + dy^2}{dx dy}$$

welche in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$ die Form

$$U_n - W_n = \frac{w}{\cos\vartheta}$$

hat, und in welcher U_x bezw. W_x die Werthe für eine Hauptkrümmungslinie angeben, deren Tangente mit der X-Achse den Winkel ϑ bildet, resultiren in den verschiedenen Coordinatensystem $p = q = v = 0$ folgende Gleichungen

$$\cos\omega_{\text{I}} = -\cos(\omega_{\text{II}} + \omega_{\text{III}}) = -\frac{w_{\text{II}}}{u_{\text{III}} - w_{\text{III}}} = -\frac{w_{\text{III}}}{u_{\text{II}} - w_{\text{II}}},$$

$$\cos\omega_{\text{II}} = \frac{w_{\text{III}}}{u_{\text{I}} - w_{\text{I}}} = \frac{w_{\text{I}}}{u_{\text{III}} - w_{\text{III}}},$$

$$\cos\omega_{\text{III}} = \frac{w_{\text{I}}}{u_{\text{II}} - w_{\text{II}}} = \frac{w_{\text{II}}}{u_{\text{I}} - w_{\text{I}}}$$

aus welchen einestheils hervorgeht, dass das Product $w(u - w)$ in allen Coordinatensystemen $p = q = v = 0$ denselben Werth hat, d. h. dass das mit dem negativen Werthe dieses Productes identische Product $W^2 \frac{dR_t}{ds}$ längs jeder Hauptkrümmungslinie einen und denselben Werth hat, anderentheils aber auch die Beziehung

$$\frac{1}{\cos\omega_{\text{I}} \cos\omega_{\text{II}} \cos\omega_{\text{III}}} = \frac{dR_t}{ds_{\text{I}}} \cdot \frac{dR_t}{ds_{\text{II}}} \cdot \frac{dR_t}{ds_{\text{III}}}$$

hergeleitet wird.

Man ersieht hieraus, dass im Falle $W(U - W) < 0$, wobei immer drei Haupttangenten existiren, sämmtliche Winkel ω spitz sind, und für alle Hauptkrümmungslinien $\frac{dR_t}{ds} > 0$ ist. Bei $W(U - W) > 0$ können eine, zwei oder drei Hauptkrümmungslinien vorhanden sein, einer der Winkel ω ist grösser als $\frac{\pi}{2}$, so dass sämmtliche Haupttangenten innerhalb eines Quadrantes verlaufen, und $\frac{dR_t}{ds}$ hat für alle einen negativen Werth. Den Übergang zwischen den beiden Typen stellen die Fälle $W(U - W) = 0$ dar, in welchen immer zwei orthogonale Krümmungslinien und eine Linie $v = u - w = 0$ existiren. Längs der letzteren, welche mit einer der beiden anderen zusammenfallen kann, ist also der Kreispunkt von höherer Ordnung, und bei dem erwähnten Zusammenfallen besteht noch dazu längs dieser Linie eine Berührung höherer Ordnung mit der Sphäre, indem sie eine Linie $v = u = w = 0$ darstellt.

Wenn in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$ auch $\mathfrak{w} = 0$ gefunden wird, so ist das Flächenelement bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als der dritten symmetrisch zur XZ-Ebene, und die t-Linie der mit dieser Ebene zusammenfallenden abwickelbaren Normalfläche stellt mithin eine Kantlinie auf der Evolute dar. Um diese für die gestaltlichen Verhältnisse der Evolute bedeutungsvollen Kantlinien zu untersuchen geht man daher am besten von den Fällen aus, in welchen die vorhandenen Linien $\mathfrak{w} = 0$ mit den Krümmungslinien zusammenfallen. Wenn in der Gleichung $\frac{dD_t}{ds} = 0$ mit Rücksicht darauf dass die Linien $\mathfrak{w} = 0$ senkrecht auf den Linien $u = 0$ stehen, $\operatorname{tg}\theta$ für $-\frac{dx}{dy}$ eingesetzt wird, so erhält man im Coordinatensystem $p = q = v = 0$ für die Orientirung der Linien $\mathfrak{w} = 0$ die cubische Gleichung

$$u \operatorname{tg}^3 \theta + 3w \operatorname{tg}\theta - \mathfrak{w} = 0$$

welche nur eine reelle Wurzel hat, sobald

$$u^2 \mathfrak{w}^3 + 4w^3 u > 0$$

ist.

Schnittlinien der Evolute mit der durch den Krümmungsmittelpunkt parallel zur Tangentialebene gelegten Ebene, der Fokalebene, findet man, indem man in den Gleichungen der Normale

$$\xi = x(1 - \zeta r) - \frac{\zeta}{2}(ux^2 + wy^2), \qquad \eta = y(1 - \zeta r) - \frac{\zeta}{2}(2wxy + \mathfrak{w}y^2),$$

$\zeta = \frac{1}{r}$, $\frac{y}{x} = y'$, $\frac{\eta}{\xi} = \eta'$ einsetzt und dann den resultirenden Ausdruck

$$\eta' = \frac{2wy' + \mathfrak{w}y'^2}{u + wy'^2}.$$

differentiirt:

$$\frac{d\eta'}{dy'} = \frac{2(uw + u\mathfrak{w}y' - w^2 y'^2)}{(u + wy'^2)^2}.$$

indem die der Bedingung $\frac{d\eta'}{dy'} = 0$ entsprechende Werthe von η' bei nach Null hin abnehmenden Werthen von x und y die Tangenten der Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene im Fokalpunkte darstellen müssen.

Die Bedingung dafür, dass die Evolute die Fokalebene schneidet ist mithin

$$uw + uuy' - w^2 y'^2 = 0$$

d. h.

$$u^2 u^2 + 4w^3 u \geqq 0.$$

Werden die Wurzeln dieser Gleichung für y' mit $a_1 a_{11}$ und die entsprechenden Werthe für η' mit $c_1 c_{11}$ bezeichnet, dann die Werthe

$$a_1 + a_{11} = \frac{uu}{w^2}, \qquad a_1 a_{11} = -\frac{u}{w}, \qquad a_1^2 + a_{11}^2 = \frac{u^2 u^2 + 2w^3 u}{w^4}$$

in den Ausdruck

$$c_1 + c_{11} = \frac{2wa_1 + ua_1^2}{u + wa_1^2} + \frac{2wa_{11} + ua_{11}^2}{u + wa_{11}^2}$$

und den entsprechenden für $c_1 c_{11}$ eingesetzt, so findet man

$$c_1 + c_{11} = \frac{u}{w}, \qquad c_1 c_{11} = -\frac{w}{u}$$

d. h. fün η' die Gleichung:

$$uw\eta'^2 - uu\eta' - w^2 = 0$$

und die Identitäten

$$c_1 = -\frac{1}{a_{11}}, \qquad c_{11} = -\frac{1}{a_1}.$$

Wird dann der Winkel, den die in der Fokalebene durch den Krümmungsmittelpunkt des Kreispunkts gezogenen Tangenten der Evolute bilden, der *Evolutenwinkel*, mit ε bezeichnet, so hat man:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{c_1 - c_{11}}{1 + c_1 c_{11}} = \frac{\sqrt{u^2 u^2 + 4w^3 u}}{w(u - w)}.$$

Aus diesem Ausdrucke ersieht man, dass bei $u^2 u^2 + 4w^3 u < 0$ d. h. wenn drei Linien $u = 0$ vorhanden sind, die Evolute nicht die Fokalebene schneidet, und dass, wenn zwei Linien $u = 0$ existiren — bei $u^2 u^2 + 4w^3 u = 0$ — nur eine Schnittlinie zwischen Evolute und Fokalebene sich vorfindet, während für Kreispunkte mit nur einer Linie $u = 0$ immer zwei solche Linien existiren, deren Tangenten im Fokalpunkte den

Evolutenwinkel bilden. Die Categorie mit nur einer Linie $u = 0$ umfasst theils die Fälle $w(u-w) > 0$ und $w(u-w) = 0$, theils aber auch Fälle $w(u-w) < 0$. Hierbei muss aber, da nur eine Linie $u = 0$ vorhanden ist, immer eine Hauptkrümmungslinie vorhanden sein, längs welcher u ein numerisches Minimum darstellt. Es muss also längs dieser Linie u und $2w-u$ dasselbe Vorzeichen haben, wonach, da $w(u-w) < 0$ ist, auch w und u dasselbe Vorzeichen haben müssen. In Kreispunkten mit nur einer Linie $u = 0$ giebt es also immer ein Coordinatensystem $p = q = v = 0$ in welchem sowohl u als w positive Werthe haben und folglich der aus der Normalengleichung erhaltene Werth für ξ in der Fokalebene immer negativ ist. Es folgt hieraus, dass sämmtliche Normalen die Fokalebene innerhalb eines der vier Winkel ε treffen, wonach die Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene nicht den Fokalpunkt überschreiten, sondern in ihm endigen. Der so bestimmte Winkel muss also wenigstens so gross sein als die Summe der zwei kleinsten Winkel ω. Da nun bei $w(u-w) < 0$ diese Summe grösser als $\frac{\pi}{2}$ ist und beim Durchgehen des Werthes $w(u-w)$ durch Null, der Werth von $\operatorname{tg}\varepsilon$ durch ∞ hindurchgeht, so folgt hieraus, dass der angegebene Werth für $\operatorname{tg}\varepsilon$ auch dem Vorzeichen nach die Grösse des Evolutenwinkels angiebt, während seine Orientirung dadurch bestimmt ist, dass in einem Coordinatensystem $p = q = v = 0$, in welchem sowohl u als w positiv sind, der negative Theil der X-Achse innerhalb desselben verläuft. Näher wird die Orientirung durch die Bissectrice bestimmt, welche mit der X-Achse in einem solchen Coordinatensystem den Winkel

$$\frac{1}{2}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{c_1 + c_{11}}{1 - c_1 c_{11}} = \frac{1}{2}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{uu}{w(u+w)}$$

bildet.

Die Bedingung $u^2u^2 + 4w^3u > 0$ bedeutet übrigens auch eine Beziehung zwischen den Winkeln ω. Aus der für ein Coordinatensystem $p = q = v = 0$ giltigen Gleichung

$$w\operatorname{tg}^2\vartheta - u\operatorname{tg}\vartheta + u - 2w = 0$$

für die Orientirung der beiden übrigen Hauptkrümmungslinien, findet man nämlich, wenn die s_1-Linie mit der X-Achse zusammenfällt, und wenn $\operatorname{tg}\vartheta_1$ $\operatorname{tg}\vartheta_{11}$ die beiden Wurzeln der Gleichung sind:

$$-\operatorname{tg}\vartheta_{1}\operatorname{tg}\vartheta_{11} = \frac{2w-u}{w} = \frac{dR_t}{ds_1} + 1 = \operatorname{tg}\omega_{11}\operatorname{tg}\omega_{111}$$

wonach aus der für $\omega_1 + \omega_{11} + \omega_{111} = \pi$ giltigen Beziehung

$$\operatorname{tg}\omega_1 + \operatorname{tg}\omega_{11} + \operatorname{tg}\omega_{111} = \operatorname{tg}\omega_1\operatorname{tg}\omega_{11}\operatorname{tg}\omega_{111}$$

die Identität

$$\frac{dR_t}{ds_1} = \frac{\operatorname{tg}\omega_{11} + \operatorname{tg}\omega_{111}}{\operatorname{tg}\omega_1}$$

erhalten wird. Wird nun diejenige Hauptkrümmungslinie in einem Kreispunkte vom Typus $w(u-w) < 0$ mit nur einer Linie $u = 0$, für welche $w \gtrless u \gtrless 0$ mithin $\frac{dR_t}{ds} < 1$ ist, als die s_1-Linie bezeichnet, so erhellt es, dass die Bedingung $u^2 u^2 + 4w^3 u > 0$ mit der Bedingung, dass die trigonometrische Tangente eines der Winkel ω grösser ist als die Summe der trigonometrischen Tangenten der beiden anderen, zusammenfällt.

In den Fällen $u^2 u^2 + 4w^3 u < 0$, in welchen sowohl u als w zwischen zwei consecutiven Coordinatensystemen $p = q = r = 0$ Vorzeichen wechseln, ist dass Krümmungsmass der Evolute längs den s-Linien der abwickelbaren Normalflächen positiv, und die drei Linien $u = 0$ können mit den Hauptkrümmungslinien zusammenfallen, wonach sie ebenso viele Kanten auf der Evolute darstellen. Man findet, dass die beiden Evolutenschalen Trichter mit drei Kanten bilden und im Fokalpunkte sich gegenseitig mit den Spitzen berühren.

In den Fällen $u^2 u^2 + 4w^3 u > 0$ findet man, dass der auf der einen Seite der Fokalebene gelegene Theil der s-Linie der abwickelbaren Normalfläche derselben Schale der Evolute angehört wie der auf der anderen Seite der Fokalebene gelegene Theil der t-Linie derselben. Da nun diese mit der Linie $u = 0$ zusammenfallen und somit eine Kante darstellen kann, so findet man, dass jede Evolutenschale eineKante hat, welche im Fokalpunkte endigt, und dass die Schnittlinien der beiden Schalen mit der Fokalebene im Fokalpunkte dieselben Tangenten haben, welche den Evolutenwinkel bilden. Der S. 81 angegebene Werth für $\frac{d}{ds}\frac{1}{\Phi'}$ ergiebt in jedem Falle, dass die Kante der einen Schale nach der anderen Schale schaut.

Die angeführten Relationen reichen dazu aus, um alle Fälle in Detail zu untersuchen ausser der Fälle, in welchen längs einer Krümmungslinie

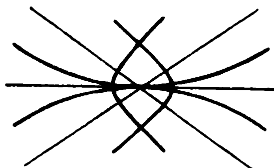
sowohl die Ordnungszahl des Kreispunkts wie die Osculation mit der Sphäre von höherer Ordnung ist. Für diese durch ein Coordinatensystem $p=q=v=u=w=0$ charakterisirten Fälle, welche man am besten durch die Untersuchung vom Zusammenrücken mehrerer Kreispunkte kennen lernt, so wie für die detaillirtere Untersuchung verweise ich auf meine a. a. O. gegebene Darstellung und beschränke mich hier auf folgende Zusammenfassung.

1. *Umbiegende Krümmungslinien.* In den Coordinatensystemen

$$p=q=v=0$$

ist $w(u-w)>0$. Die zwei Evolutenschalen sind offen und haben jede eine Kante, welche im Fokalpunkte endigt. Sie schneiden sich beim Durch-

Fig. 2.



gang durch die Fokalebene, wobei ihre in dieser belegenen Tangenten einen Evolutenwinkel kleiner als $\frac{\pi}{2}$ bilden. Sämmtliche Haupttangenten verlaufen innerhalb eines Winkels von $\frac{\pi}{2}$. Bei $u^2<4w(u-2w)$ existirt nur eine Haupttangente. Wenn in einem Coordinatensystem $p=q=v=0$, $u^2=4w(u-2w)$ ist, so giebt es noch ein anderes, in welchem $u=2w$ ist, wobei die entsprechende Krümmungslinie auf der nach dem spitzen Winkel zwischen den zwei Haupttangenten gewendeten Seite von anschmiegenden Krümmungslinien begleitet ist. Bei $u^2>4w(u-2w)$ giebt es immer drei Haupttangenten, und diese Bedingung ist für alle drei Coordinatensysteme $p=q=v=0$ erfüllt. Die mittlere der drei in den Kreispunkt eintretenden Krümmungslinien ist beiderseits von anschmiegenden Krümmungslinien begleitet. S. Fig. 2.

2. *Ausbiegende Krümmungslinien.* Drei Coordinatensysteme

$$p=q=v=0.$$

In allen $w(u-w)<0$. Nirgends mehr als zwei Haupttangenten innerhalb eines Winkels von $\frac{\pi}{2}$. S. Fig. 3.

a) $u^2w^2+4w^3u>0$ in den Coordinatensystemen $p=q=v=0$. Die Tangente des einen Winkels zwischen zwei Haupttangenten ist grösser als die Tangentensumme der beiden anderen. Die Evoluten schneiden einander in der Fokalebene. Evolutenwinkel grösser als $\frac{\pi}{2}$. Jede Schale hat eine Kante, welche im Fokalpunkte endigt.

b) In zwei der bezüglichen Coordinatensystemen ist $u^2w^2+4w^3u=0$ im dritten $u=0$. Die Tangente des einen Winkels zwischen zwei Haupttangenten ist gleich der Tangentensumme der beiden anderen. Jede Evolutenschale hat eine Kante, welche in dem Fokalpunkt endigt. Die eine Schale geht mit nur einer Schnittlinie durch die Fokalebene. Die andere ist längs einer diese Schnittlinie im Fokalpunkt berührenden Kante umgebogen und liegt ganz auf der einen Seite der Fokalebene.

Fig. 3.

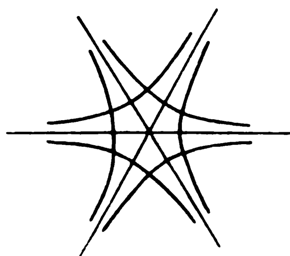
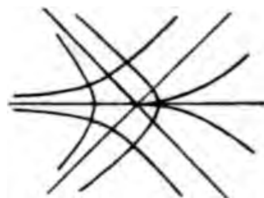


Fig. 4.



c) In allen Coordinatensystemen $p=q=v=0$ ist $u^2w^2+4w^3u<0$. Kein Winkel zwischen zwei Haupttangenten hat eine trigonometrische Tangente, welche die Tangentensumme der beiden anderen erreicht oder übersteigt. Die Evolutenschalen bilden jede einen geschlossenen Trichter mit drei Kanten, sind auf verschiedenen Seiten der Fokalebene belegen und stossen mit ihren Spitzen im Fokalpunkt zusammen.

3. *Eine durchgehende Krümmungslinie und zwei orthogonale.* Für alle bezüglichen Coordinatensysteme ist $w(u-w)=0$. Der Krümmungslinientypus zeigt eine Combination von ausbiegenden und umbiegenden Krümmungslinien. S. Fig. 4. Beide Evolutenschalen schneiden die Fokalebene.

Der Evolutenwinkel ist $\frac{\pi}{2}$. Die eine Schale ist ohne Kanten, die andere hat eine durch den Fokalpunkt hindurchgehende. Die zwei orthogonalen Krümmungslinien entsprechen Coordinatensystemen $p = q = v = w = 0$. Im dritten Coordinatensystem $p = q = v = 0$ ist $u = w$ und die Ordnungszahl des Kreispunkts eine gerade. Ist in einem Kreispunkte $w(u - w) = 0$ längs der Linie $u = w$ die Ordnungszahl des Kreispunkts eine ungerade, so gehört er dem Typus mit umbiegenden Krümmungslinien bezw. dem Typus mit ausbiegenden Krümmungslinien und $u^2 w^2 + 4w^3 u > 0$ an, je nachdem längs dieser Linie der erste Differentialquotient der Differenz $D_s - D_t$ welcher von Null verschieden ist, dasselbe Vorzeichen wie w hat oder umgekehrt. Fällt die Linie $u - w = 0$ mit einer der orthogonalen Krümmungslinien zusammen, wobei längs dieser nicht nur die Ordnungszahl des Kreispunkts, sondern auch der Osculation mit der Sphäre höher ist, so entstehen besondere Typen.

2. *Kreispunkte zweiter Ordnung.*

Die Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^2 D_s}{ds^2} = 0$ für die Orientirung der Haupttangenten lautet:

$$\partial^{31} dx^4 + (3\partial^{22} - \partial^{40}) dx^3 dy + 3(\partial^{13} - \partial^{31}) dx^2 dy^2 +$$
$$+ (\partial^{04} - 3\partial^{22}) dx dy^3 - \partial^{13} dy^4 = 0$$

und in einem Coordinatensystem $p = q = \partial^{31} = 0$ gelten für die von der X-Achse berührten Hauptkrümmungslinie die Werthe

$$\Phi = \partial^{40} - 3r^3, \qquad \Omega = \partial^{22} - r^3, \qquad \Phi' = \partial^{04} - r^3 - \frac{6\Omega^2}{\Phi - \Omega},$$
$$\frac{1}{R_s} = \frac{\partial^{41}}{3(\Phi - 2\Omega)}, \qquad \frac{dR_t}{ds} = \frac{\Omega - \Phi}{2\Omega}.$$

Die s- und t-Linien der von der XZ-Ebene in diesem Coordinatensystem berührten abwickelbaren Normalfläche bilden im allgemeinen Falle Spitzen im Fokalpunkt, welche bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als der dritten mit denjenigen von semicubischen Parabeln zusammenfallen.

Die der s-Linie entsprechende semicubische Parabel ist

$$9\Phi\xi^2 = -8D^4(\zeta - \rho)^3$$

deren Spitze eine Evolute vom Krümmungshalbmesser $+\frac{\Phi}{D^4}$ hat. Dieser Krümmungshalbmesser ist für die t-Linie

$$+\frac{4\Omega^2}{D^4(\Phi-3\Omega)^2}$$

und die Gleichung der ihr entsprechenden semicubischen Parabel

$$9\Omega^2\xi^2 = -2D^4(\Phi-3\Omega)^2(\zeta-\rho)^3.$$

Von den Kreispunkten zweiter Ordnung sind diejenigen, welche zwei Symmetrieebene besitzen zugleich die wichtigsten und der Untersuchung am leichtesten zugänglich. Sie haben zwei Coordinatensysteme

$$p = q = \partial^{31} = \partial^{13} = 0,$$

in welchen also sowohl die Y- als die X-Achse Haupttangenten sind und können ausserdem noch zwei symmetrisch zu diesen Haupttangenten verlaufenden Krümmungslinien haben. Die geometrischen Grössen, welche die von der X- bezw. Y-Achse in einem solchen Coordinatensystem berührten Hauptkrümmungslinien charakterisiren, mögen mit $\Phi_{\text{I}}\,\Phi'_{\text{I}}$ bezw. $\Phi_{\text{II}}\,\Phi'_{\text{II}}$ u. s. w. bezeichnet werden, die für die beiden übrigen gemeinsamen mit $\Phi_{\text{III}}\,\Phi'_{\text{III}}$ u. s. w. Da nun aber $\Omega_{\text{I}} = \Omega_{\text{II}}$ ist, mag für diese Werthe die Bezeichnung Ω gebraucht werden.

In einem Coordinatensystem $p = q = \partial^{31} = \partial^{13} = 0$ erhält man für einen beliebigen Normalschnitt

$$\frac{d^4D_t}{ds^4} = \Phi_{\text{I}}\cos^4\vartheta + 6\Omega\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta + \Phi_{\text{II}}\sin^4\vartheta$$

und für die beiden s_{III}-Linien

$$\operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{\Phi_{\text{I}}-3\Omega}{\Phi_{\text{II}}-3\Omega}$$

woraus resultirt

$$\Phi_{\text{III}} = \frac{\Phi_{\text{I}}\Phi_{\text{II}}-9\Omega^2}{\Phi_{\text{I}}+\Phi_{\text{II}}-6\Omega}.$$

Die S. 82 angebene Gleichung für $d^{\text{v}}D_s - d^{\text{v}}D_t$ längs einer beliebigen Hauptkrümmungslinie hat die Form

$$\Phi_{\text{III}} - \Omega_{\text{III}} = 2\Omega.$$

Auf der Evolute hat das Krümmungsmass längs der s-Linie einer abwickelbaren Normalfläche entgegengesetztes Vorzeichen gegen dem Produkt $\Phi\Omega$. Als Bedingung für Schnittlinien zwischen Evolute und Fokalebene findet man auf ähnliche Weise wie in den Kreispunkten erster Ordnung

$$\frac{d\eta'}{dy'} = \frac{3\{\Phi_{11}\Omega y'^4 + (\Phi_1\Phi_{11} - 3\Omega^2)y'^2 + \Phi_1\Omega\}}{(\Phi_1 + 3\Omega y'^2)^2}.$$

woraus resultirt

$$y'^2 = \frac{3\Omega^2 - \Phi_1\Phi_{11} \pm \sqrt{(\Phi_1\Phi_{11} - \Omega^2)(\Phi_1\Phi_{11} - 9\Omega^2)}}{2\Phi_{11}\Omega}.$$

Dieser Ausdruck lehrt, dass, wenn Φ_1 und Φ_{11} verschiedenes Vorzeichen haben, für y'^2 immer ein positiver und ein negativer Werth erhalten wird, so dass immer zwei symmetrische Schnittlinien mit der Fokalebene existiren. Wenn alle drei Grössen dasselbe Vorzeichen haben sind bei $\Omega^2 \gtreqless \Phi_1\Phi_{11}$ vier bezw. zwei Schnittlinien vorhanden. Haben endlich Φ_1 und Φ_{11} dasselbe, Ω aber entgegengesetztes Vorzeichen so muss die Bedingung $\Phi_1\Phi_{11} \geqq 9\Omega^2$ erfüllt sein, wenn Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene vorhanden sein sollen, und man findet dabei wieder vier bezw. zwei dieser Linien, welche immer paarweise symmetrisch zu den orthogonalen Haupttangenten verlaufen.

Von den mittels dieser Hülfsmittel erhaltenen Resultaten gebe ich hier eine kurzgefasste Zusammenstellung, in welcher ich zu meiner a. a. O. gegebenen Darstellung einige durch die Untersuchung der Kantlinien mittelst der Werthe Φ' gewonnene Details hinzugefügt habe.

Kreispunkte zweiter Ordnung mit zwei Symmetrieebenen.

1. *Einlaufende Krümmungslinien der einen Schaar und umkreisende der anderen.* $\Omega(\Phi_1 - \Omega) > 0$, $\Omega(\Phi_{11} - \Omega) > 0$. Zwei oder vier Krümmungslinien, jede zweite beiderseits von anschmiegenden Krümmungslinien umgeben. (Figg. 5 und 6.) Die Evolute bildet zwei geschlossene Trichter auf einer und derselben Seite der Fokalebene. Die eine Schale ist ohne Kanten, die andere hat zwei oder vier durch die Spitze hindurchgehende Kanten je nach der Zahl der vorhandenen Haupttangenten, wie es die Fig. 7 in zur Fokalebene parallelen Schnitten der Evolute andeutet. Doch kann bei Vorhandensein von nur zwei Haupttangenten die eine durch die Spitze hin-

durchgehende Kante in drei zerfallen, so dass vier anstatt zwei Kanten vorhanden sind. In Falle $\Phi_1 = \Phi_{11} = 3\Omega$ besteht eine Berührung höherer Ordnung mit dem Scheitelpunkte einer Umdrehungsfläche, wobei jede Tangente des Kreispunkts eine Haupttangente ist, und eine Vermehrung der Anzahl der Kanten auf der betreffenden Evolutenschale bezw. das Degeneriren dieser in eine Umdrehungsachse stattfindet.

Fig. 5.

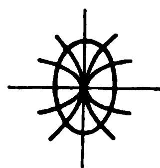


Fig. 6.

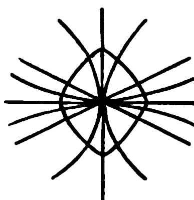
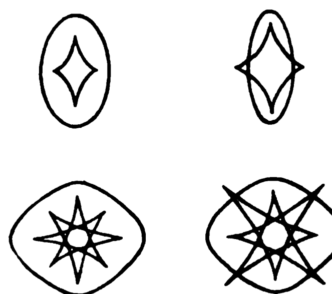


Fig. 7.



2. *Ausbiegende Krümmungslinien.* $\Omega(\Phi_1 - \Omega) < 0$, $\Omega(\Phi_{11} - \Omega) < 0$. Immer vier Haupttangenten, jede zweite einer anderen Schaar angehörend. Die Evolutenschalen bilden entweder zwei geschlossene Trichter, einen auf jeder Seite der Fokalebene, mit je zwei durch die Spitze hindurchgehenden Kanten und positiven Krümmungsmass der Flächen, oder es ist einer der Trichter theilweise durch die Fokalebene hindurch umgebogen, wobei entweder vier Schnittlinien mit der Fokalebene und zwei auf dem nicht umgebogenen Theil durch den Fokalpunkt hindurchgehende Kanten vorhanden sind, oder auch nur zwei Schnittlinien der Evolute mit der Fokalebene existiren, in welchem Falle die Kanten der fraglichen Evolutenschale verschwinden. Im sämmtlichen Typen kann eine Vermehrung der Anzahl der Kanten vorkommen, indem eine Kante in drei zerfallen kann.

3. *Eine durchgehende Krümmungslinie jeder Schaar.*

$$(\Phi_1 - \Omega)(\Phi_{11} - \Omega) < 0.$$

Zwei oder vier Haupttangenten. Im letzteren Falle gehören drei, welche innerhalb eines Winkels von $\frac{\pi}{2}$ verlaufen, einer und derselben Schaar an, wobei die mittlere beiderseits von anschmiegenden Krümmungslinien begleitet

bei $\Phi_1 \Phi_{11} > 0$. Diese Fälle, welche man durch Untersuchung des Zusammenfallens von zwei oder mehreren Kreispunkten erster und zweiter Ordnung kennen lernt, bieten verschiedene Combinationen der erwähnten Typen dar.

3. *Kreispunkte höherer Ordnung.*

Aus der Beziehung

$$d^n D\, ds^2 = d^{n+2} z - d^{n+2} z_1$$

erhellt es, da

$$d^{n+2} z - d^{n+2} z_1$$

nur Differentialquotienten der Flächengleichung von der Ordnung $n+2$ enthält, dass sämmtliche Glieder und folglich auch sämmtliche Wurzeln der Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ frei gewählt werden können. Es können also sämmtliche Wurzeln reell sein. Dabei muss aber in jedem Coordinatensystem $p = q = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+1} \partial y} = 0$, in welchem die Gleichung die Form

$$0 = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+2}} - \frac{\partial^{n+2} z_1}{\partial x^{n+2}} + \frac{(n+2)(n+1)}{2} \left(\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^n \partial y^2} - \frac{\partial^{n+2} z_1}{\partial x^n \partial y^2} \right) \operatorname{tg}^2 \vartheta + \ldots$$

hat, wegen der Bedeutung der Coefficienten, $\frac{d^n D_t}{ds^n} \cdot \frac{d^n D_t}{ds^n} < 0$ sein. Da nun wenigstens eine Linie $\frac{d}{d\vartheta} \frac{d^n D}{ds^n} = 0$ d. h. eine Hauptkrümmungslinie immer zwischen zwei Linien $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ belegen sein muss, so findet man, dass unabhängig von der Ordnungszahl des Kreispunkts immer ein Typus existirt mit $n+2$ Hauptkrümmungslinien, von welchen jede zweite einer anderen Schaar angehört, mit allseitig ausbiegendem Krümmungslinientypus und positivem Krümmungsmass der Evolute längs den s-Linien der abwickelbaren Normalflächen, und in welchem die Evolute zwei geschlossene sich gegenseitig mit den Spitzen im Fokalpunkt berührende Trichter mit $n+2$ Kanten bilden, einen auf jeder Seite der Fokalebene.

In den Kreispunkten ungerader Ordnung ist die Zahl der Glieder in den Gleichungen $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ und $\frac{d}{d\vartheta} \frac{d^n D}{ds^n} = 0$ eine gerade, und jedes Glied

mit gerader Ordnungszahl der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ enthält zwei Glieder mit ungerader Ordnungszahl der Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$, das letzte ausgenommen, welches nur das vorletzte Glied dieser Gleichung enthält. Auf dieselbe Weise enthält jedes Glied ungerader Ordnungszahl der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$, das erste ausgenommen, zwei Glieder der Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$, und zwar in der Weise, dass sämmtliche Coefficienten und folglich auch sämmtliche Wurzeln der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ frei gewählt werden können, wobei auch sämmtliche Glieder der Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ eindeutig bestimmt werden. Man kan also erstere Gleichung so wählen, dass nur eine reelle Wurzel existirt. Es resultirt für alle Kreispunkte ungerader Ordung ein Typus mit nur einer Krümmungslinie, umbiegendem Krümmungslinientypus und einer Evolute, welche aus zwei die Fokalebene schneidenden Schalen mit wenigstens je einer im Fokalpunkte endigenden Kante besteht.

In den Kreispunkten gerader Ordnung ist die Anzahl der Glieder in den Gleichungen $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ und $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ eine ungerade, woraus folgt, dass in letzterer Gleichung wohl alle Glieder gerader Ordnungszahl, nicht aber alle Glieder ungerader Ordnungszahl frei gewählt werden können, sowie dass die Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ nicht durch die Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ eindeutig bestimmt ist. Wenn aber sämmtliche Glieder gerader Ordnungszahl in der Gleichung $\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ gleich Null sind, so sind auch sämmtliche Glieder ungerader Ordnungszahl der Gleichung $\frac{d}{d\vartheta}\frac{d^n D}{ds^n} = 0$ Null, und die übrigen Glieder können frei gewählt werden. Setzt man alle diese Glieder mit Ausnahme der zweiten und der vorletzten gleich Null, so nimmt diese Gleichung die Form

$$\left((n+1)\frac{d^n D_t}{ds_1^n} - \frac{d^n D_s}{ds_1^n}\right)\cos^{n+1}\vartheta\sin\vartheta - \left((n+1)\frac{d^n D_t}{ds_{11}^n} - \frac{d^n D_s}{ds_{11}^n}\right)\cos\vartheta\sin^{n+1}\vartheta = 0$$

an, wobei mit s_1 bezw. s_{11} die mit der X- bezw. Y-Achse zusammenfallende Krümmungslinie bezeichnet wird. Da nun die betreffenden Glieder der Gleichung $\frac{d^n D_s}{ds^n} = 0$ erst dann bestimmt werden, wenn noch eine Be-

ziehung zwischen den vier in obiger Gleichung enthaltenen Grössen eingeführt wird, so kann man, wenn mit k eine beliebige Zahl gemeint wird, eine der Bedingungen

$$\frac{d^n D_s}{ds_1^n} - \frac{d^n D_t}{ds_1^n} = \pm k^2 \left(\frac{d^n D_s}{ds_{11}^n} - \frac{d^n D_t}{ds_{11}^n} \right)$$

benutzen, woraus dann erhellt, dass bei Kreispunkten gerader Ordnung immer sowohl ein Typus mit zwei einlaufenden Krümmungslinien der einen Schaar und umkreisenden der anderen wie ein Typus mit einer durchgehenden Krümmungslinie jeder Schaar vorkommt.

Wie man ersieht, kehren in den Kreispunkten höherer Ordnung die in den Kreispunkten erster und zweiter Ordnung vorkommenden Haupttypen wieder. Es lässt sich aber erwarten, dass die Zwischenformen mit steigender Ordnungszahl der Kreispunkte immer complicirter werden.

4. *Linien sphärischer Krümmung.*

Von diesen giebt es zwei Hauptformen: solche mit variirender und solche mit constanter sphärischer Krümmung. Erstere Form besteht aus einer unendlichen Reihe von Kreispunkten erster Ordnung mit einer durchgehenden Krümmungslinie und zwei orthogonalen. Die Krümmungslinien jeder Schaar schneiden also, unter sich orthogonal, die Linie sphärischer Krümmung unter endlichen Winkeln, biegen aber in den Schnittpunkten rechtwinkelig um. Die Schnittlinie der Fläche

$$z = \frac{1}{2a}\left(x^2 + \frac{a^2 y^2}{x^2 + a^2}\right)$$

mit der XZ-Ebene giebt ein Beispiel für eine solche Linie ab.

Linien constanter sphärischer Krümmung kommen auf Umdrehungsflächen vor, und sind von Kreispunkten zusammengesetzt, welche längs dem Meridiane von gerader oder ungerader Ordnung sind, je nachdem die Evolute dieser Linie im betreffenden Krümmungsmittelpunkt eine Spitze hat oder nicht. In ersten Falle gehören die Meridiane auf beiden Seiten der Linie sphärischer Krümmung derselben Schaar an, im letzteren biegen die Krümmungslinien beiderseits rechtwinkelig in die Linie sphärischer Krümmung um, und die Meridiane auf der einen Seite gehören derselben Schaar an wie die Parallelkreise auf der anderen, wobei die Umdrehungsachse aus Theilen beider Evolutenschalen entstanden ist.

SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UNE BRANCHE UNIFORME D'UNE FONCTION MONOGÈNE

(cinquième note)

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

J'ai consacré le § 2 de ma quatrième note [1] à une étude approfondie d'une généralisation de l'intégrale LAPLACE-ABEL dont les conséquences ont

---

[1] Après la publication de la quatrième note ont paru les travaux suivants qui se rapportent au mémoire présent:

ÉDOUARD A. FOUËT. *Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.* Paris 1902. Prem. partie. Chap. V.

ALFRED PRINGSHEIM. *Jacques Hadamard. La série de Taylor et son prolongement analytique.* Archiv. der Math. u. Physik. III Reihe, Bd. 3, 1902, pag. 289, 290, 294, 295.

ERNST LINDELÖF. *Une application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor.* Comptes Rendus, etc. T. 135, 29 décembre 1902, pag. 1315—1318.

FRANC G. RADELFINGER. *Analytical representation of complex functions.* Phil. Soc. of Washington. Bull. Vol. 14. 1902, pp. 227—232.

FRANC G. RADELFINGER. Bull. of the Amer. Math. Soc. Vol. 8, 1901—1902, pp. 15, 16.

F. R. MOUTTON. Bull. of the Amer. Math. Soc. Vol. 9, pp. 98, 99.

LUCIUS HANNI. *Zurückführung der allgemeinen Mittelbildung Borel's auf Mittag-Lefflers n-fach unendliche Reihe.* Monatshefte für Math. und Physik. Jahrg. 14, 1903, pag. 105—124.

SALVATORE PINCHERLE. *Di una nuova operazione funzionale e di qualche sua applicazione.* Rend. R. Accad. delle scienze dell' Ist. di Bologna. 8 marzo 1903, pag. 4.

GEORG FABER. *Über die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorschen Reihen.* Math. Annalen. Bd. 57. H. 3, 1903, pag. 385.

GEORG FABER. *Über polynomische Entwickelungen.* Math. Annalen. Bd. 57. H. 3, 1903, pag. 406—408.

ERNST LINDELÖF. *Sur l'application de la théorie des résidus au prolongement analytiques des séries de Taylor.* Journ. de math. pures et appl. Sér. 5. T. 9, 1903, pag. 213—221.

été résumés dans le théorème 7 b. J'arriverai dans la note présente par une seconde voie à une nouvelle généralisation qui amène à un résultat

---

J. Malmquist. *Sur le calcul des intégrales d'un système d'équations différentielles par la méthode de Cauchy-Lipschitz.* Arkiv för Mat. Astr. och Fysik. Stockholm. Bd. 1. 13 maj 1903, pag. 149—156.

Helge von Koch. *Sur une classe remarquable de fonctions entières et transcendentes.* Arkiv för Mat. Astr. och Fysik. Stockholm. Bd. 1. 9 sept. 1903, pag. 205—208.

Georg Faber. *Über Reihenentwickelungen analytischer Functionen.* Inaug. Diss. München 1903, pag. 65—66.

Ernst Lindelöf. *Sur la détermination de la croissance des fonctions entières définies par un développement de Taylor.* Bull des. sciences math. Sér. 2. T. 27, août 1903, pag. 224, 225.

Leopold Fejer. *Untersuchung über Fourier'sche Reihen.* Math. Annalen. Bd. 58, pag. 51.

S. Pincherle. *Sulla Sviluppabilità di una funzioni in serie de fettoriali.* R. Ac. d. Lincei. Vol. 12. 2 sem. Serie 5, 8 nov. 1903.

S. Pincherle. *Sulle funzioni meromorfe.* R. Ac. d. Lincei. Vol. 12. 2 sem. Serie 5, 22 nov. 1903.

E. Phragmén. *Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions.* Ce journal. T. 28, pag. 351—368.

Émile Picard. *Sur certains développements en séries déduits de la méthode de Cauchy dans la théorie des équations différentielles ordinaires.* An. École Norm. T. 21. An. 1902, pag. 141—151.

Sous presse:

L. Hanni. *Über die Beziehungen zwischen der Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Function durch Herrn Mittag-Leffler, der Methode des Mittelwerte des Herrn Borel und der Transformation des Herrn Lindelöf.* Acta Math. Ce Tôme.

A. Wiman. *Über den Fundamentalsatz in der Theorie der Functionen $E_a(x)$.* Acta Math. Ce Tôme.

A. Wiman. *Über die Nullstellen der Functionen $E_a(x)$.* Ce Tôme.

J. Malmquist. *Étude d'une fonction entière.* Acta Math. Ce Tôme.

Voir encore mes articles:

Sur l'intégrale de Laplace-Abel. Comptes Rendus etc. T. 135, 1 décembre 1902, pag. 937—939.

Une généralisation de l'intégrale de Laplace-Abel. Comptes Rendus etc. T. 136, 2 mars 1903, pag. 537—539.

Sur la nouvelle fonction $E_a(x)$. Comptes Rendus etc. T. 137, 12 octobre 1903, pag. 554—558.

Sopra la funzione $E_a(x)$. R. Accad. dei Lincei. Atti. Ser. 5. Vol. 13, 3 gennaio 1904, pag. 3—5.

final de la même portée que l'autre, ayant de plus l'avantage d'être d'une très grande simplicité et de mettre mon problème sous un jour nouveau.

Rappelons d'abord la définition de l'intégrale LAPLACE-ABEL. Soit $k_0, k_1, k_2, \ldots$ une suite de constantes assujetties à la condition que la limite supérieure des valeurs limites des nombres $|\sqrt[\nu]{k_\nu}|$ soit finie.[1] On sait que l'inverse de cette limite supérieure, soit r, est le rayon de convergence de la série.

J'exprimerai avec M. PRINGSHEIM[2] cette propriété des constantes k_0, $k_1, k_2, \ldots$ par la formule

$$\overline{\operatorname{Lim}}_{\nu=\infty} |\sqrt[\nu]{k_\nu}| = \frac{1}{r} \tag{1}$$

et je désignerai par $F(x)$ la fonction analytique qui est définie par les constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$.

On sait que

$$\operatorname{Lim}_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\frac{1}{\lfloor\nu}} = 0.$$

La série

$$\overline{F}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\lfloor\nu} x^\nu \tag{2}$$

est donc une série toujours convergente. C'est alors l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega} \overline{F}(\omega x) d\omega$$

où l'intégrale est prise par rapport aux valeurs positives de ω qui est la célèbre intégrale LAPLACE-ABEL.

Monsieur BOREL dans une série de travaux[3] d'une très grande im-

---

Un nouveau théorème général de la théorie des fonctions analytiques. Comptes Rendus etc. T. 138, 11 avril 1904, pag. 881—884.

Une nouvelle fonction entière. Comptes Rendus etc. T. 138, 18 avril 1904, pag. 941, 942.

[1] c. f. première note, pag. 43, note 12.

[2] ALFRED PRINGSHEIM. *Zur Theorie des Doppel-Integrals.* Sitzb. d. math. phys. Cl. d. K. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 28. 1898, H. 1, pag. 62.

[3] Voir surtout:

ÉMILE BOREL. *Mémoire sur les séries divergentes.* Annales de l'École normale. Sér. 3. T. 16. Année 1899.

ÉMILE BOREL. *Leçons sur les series divergentes.* Paris, Gauthier-Villars, 1901.

portance est arrivé le premier à fixer le domaine de x pour lequel l'intégrale converge.

Ce domaine est une étoile de centre zéro inscrite dans l'étoile principale définie par les constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$ et circonscrite au cercle de convergence de la série $k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots$.[1] Je désignerai dans la présente note cette étoile par la lettre $B^{(1)}$. L'étoile s'obtient de la manière suivante. On limite chacun des vecteurs l issu du centre à une longueur ρ qui est la limite supérieure d'une autre longueur d, limitant l elle-même, et telle que le cercle ayant d comme diamètre fasse partie de l'étoile principale A.

M. Borel avait démontré la convergence de l'intégrale Laplace-Abel pour l'intérieur de $B^{(1)}$. M. Phragmén[2] est arrivé à montrer que l'intégrale Laplace-Abel ne peut pas converger en dehors de $B^{(1)}$. L'étoile $B^{(1)}$ est donc quant à la variable x une véritable étoile de convergence pour l'intégrale Laplace-Abel, de même que le cercle C de centre zéro et de rayon r est un cercle de convergence de la série $k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots$. L'égalité

$$FB^{(1)}(x) = \int_0^\infty e^{-\omega} \overline{F}(\omega x) d\omega \tag{3}$$

a lieu pour un domaine quelconque à l'intérieur de $B^{(1)}$ de même que l'égalité de Taylor

$$FC(x) = \operatorname{Lim}_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu x^\nu \tag{4}$$

a lieu pour chaque domaine à l'intérieur de C.

Voyons maintenant une manière fort simple de généraliser l'intégrale Laplace-Abel qui permet d'obtenir une étoile de convergence plus étendue que $B^{(1)}$ s'approchant indéfiniment avec la variation d'un certain paramètre

---

[1] voir pour la définition de »l'étoile», »l'étoile principale», »étoile inscrite» et »étoile circonscrite»: première note page 47, seconde note page 200, seconde note page 183. J'ai désigné auparavant l'étoile A comme étoile principale des constantes $k_0, \lfloor 1\, k_1, \lfloor 2\, k_2, \lfloor 3\, k_3, \ldots$.

[2] E. Phragmén. *Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie* $\int_0^\infty F(ax)e^{-a}da$. Comptes Rendus. etc. 10 juin 1901.

de l'étoile principale A. Introduisons au lieu de »la fonction génératrice» d'ABEL $\overline{F}(x)$ une nouvelle fonction génératrice un peu plus générale définie par l'égalité

$$F_a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\underline{|a\nu}} x^\nu \tag{5}$$

où

$$\underline{|a\nu} = \Gamma(a\nu + 1) \tag{6}$$

et où a désigne une quantite positive donnée. On a

$$F_1(x) = \overline{F}(x), \tag{7}$$

et on voit que $F_a(x)$ est une série toujours convergente de même que $\overline{F}(x)$.

J'introduirai donc au lieu de l'intégrale LAPLACE-ABEL:

$$\int_0^\infty e^{-\omega} F_1(\omega x) d\omega$$

l'intégrale nouvelle plus générale

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{a}} = \int_0^\infty e^{-\omega} F_a(\omega^a x) d\omega \tag{8}$$

et je démontrerai le théorème suivant:

»L'intégrale $f(x)$ possède par rapport à x une étoile de convergence $B^{(a)}$ qui est inscrite dans l'étoile A et qui tend indéfiniment vers cette étoile en même temps que a tend vers zéro. L'égalité

$$FB^{(a)}(x) = f(x)$$

a lieu partout à l'intérieur de $B^{(a)}$.»

La démonstration de ce théorème sera partagée en trois parties différentes.

1° »L'intégrale $f(x_0)$ étant convergente l'intégrale $f(x)$ est uniformément convergente pour le domaine $\theta x_0 (\theta_0 \leqq \theta \leqq 1)$, où θ_0 désigne une quantité positive.»

2° »L'intégrale $f(x_0)$ étant convergente l'intégrale $f(x)$ représente sur le vecteur $(0x_0)$ la fonction $FC(x)$ ainsi que sa continuation analytique le long de ce vecteur.

Faisons parcourir à x_0 tous les points à l'intérieur de l'étoile A pour lesquels le domaine[1]

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1; \qquad \begin{array}{ll} -\alpha\frac{\pi}{2} < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \alpha\frac{\pi}{2} & (\text{si } 0 < \alpha < 2) \\ -\pi < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \pi & (\text{si } \alpha \geqq 2) \end{array}$$

est situé à l'intérieur de A et appelons $B^{(\alpha)}$ l'étoile obtenue de cette manière. L'intégrale $f(x)$ n'est jamais convergente en dehors de $B^{(\alpha)}$.»

3° L'intégrale $f(x)$ converge d'une manière uniforme pour tout domaine à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$.»

Les deux propositions 1 et 2 seront démontrées dans le § 1. Quant à la proposition 3 elle demande pour être démontrée l'intervention d'une nouvelle transcendente qu'on obtient en simplifiant $F_\alpha(x)$ en faisant

$$k_0 = k_1 = k_2 = \ldots = k_\nu = \ldots = 1$$

et que je désignerai par

$$E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\underline{|\alpha\nu}}. \tag{9}$$

Des propriétés différentes de cette transcendente seront développées dans les §§ 2 et 3. La démonstration complète de la proposition 3 sera donnée dans le § 4.

Dans le cas $\alpha = 1$ l'intégrale Laplace-Abel

$$\int_0^\infty e^{-\omega} F_1(\omega x) d\omega$$

pouvait être transformée dans l'expression de M. Borel:

$$\lim_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_n x^n) \frac{\omega^{n+1}}{\underline{|n+1}}$$

qui a le même domaine de convergence $B^{(1)}$ que l'intégrale. J'obtiendrai dans le § 4 pour α quelconque une nouvelle expression ayant la même forme que celle de M. Borel. J'obtiendrai de même deux nouvelles expression d'une forme interessante. Dans le § 5, où je laisse tomber la condition que l'étoile de l'expression doit être une étoile de convergence j'obtiendrai encore des nouvelles expressions.

[1] Je désigne par $R(z)$ la partie réelle de z et par $Arg(z)$ l'argument de z.

§ 1.

Je commence par établir le théorème suivant.

A. »Si on admet que l'intégrale

$$f(x_0) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

est convergente, l'intégrale

$$f(\theta x_0) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega \theta x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

est nécessairement uniformément convergente pour le domaine $\theta x_0 (\theta_0 \leq \theta \leq 1)$ où θ_0 désigne une quantité positive.»

On voit l'analogie complète avec le célèbre théorème d'ABEL pour la série de puissances.[1] La démonstration est absolument la même que celle que M. PHRAGMÉN a donnée pour le cas $\alpha = 1$.[2]

Posons

$$F_\alpha(\omega x_0) = \varphi(\omega) + i\psi(\omega)$$

$\varphi(\omega)$ et $\psi(\omega)$ étant réels. Les deux intégrales

$$\int_0^\infty \varphi(\omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad \int_0^\infty \psi(\omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

[1] *Recherches sur la série* $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots.$ Théorème 4. Oeuvres. Nouvelle éd. T. 1, pag. 223

[2] E. PHRAGMÉN. *Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie* $\int_0^\infty F(ax)e^{-a}da$. Comptes Rendus etc. 10 juin 1901.

convergent, et il s'agit de démontrer, que les intégrales

$$\int_0^\infty \varphi(\theta\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}d\omega^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad \int_0^\infty \psi(\theta\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

convergent de même d'une manière uniforme pour le domaine $\theta_0 \leqq \theta \leqq 1$, θ_0 étant positif. Considérons par exemple la première. On a:

$$\int_{\omega_1^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega_2^{\frac{1}{\alpha}}} \varphi(\theta\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}}\int_{(\theta\omega_1)^{\frac{1}{\alpha}}}^{(\theta\omega_2)^{\frac{1}{\alpha}}} \varphi(\omega)e^{-\left(\frac{\omega}{\theta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}}\int_{(\theta\omega_1)^{\frac{1}{\alpha}}}^{(\theta\omega_2)^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(\theta^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)}\varphi(\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Appliquons maintenant le second théorème de la moyenne pour les intégrales définies et nous aurons:

$$\int_{(\theta\omega_1)^{\frac{1}{\alpha}}}^{(\theta\omega_2)^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(\theta^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)}\varphi(\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = e^{-\omega_1^{\frac{1}{\alpha}}\left(1-\theta^{\frac{1}{\alpha}}\right)}\int_{(\theta\omega_1)^{\frac{1}{\alpha}}}^{(\theta\varpi)^{\frac{1}{\alpha}}} \varphi(\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

ϖ désignant une certaine valeur entre ω_1 et ω_2. Il s'ensuit immédiatement que l'intégrale $\int_0^\infty \varphi(\theta\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ converge uniformément pour $\theta_0 \leqq \theta \leqq 1$, θ_0 étant positif.

Le théorème A est par conséquent démontré.

Quant à la fonction $F_\alpha(\omega x_0)$ la seule condition à laquelle elle soit assujetie dans le théorème est, on le voit, que l'expression

$$e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}F_\alpha(\omega x)d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

soit intégrable. L'importance de cette remarque qui a été déjà faite par M. Phragmén sera mise en évidence dans une autre occasion.

L'intégrale $f(\theta x_0)$ peut être transformée de la manière suivante

$$(10) \qquad f(\theta x_0) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega\theta x_0) d\omega^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\omega}{\theta}\right)^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

Posons encore:

$$(11) \qquad \Phi_a(\omega) = \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

L'intégrale $f(x_0)$ étant convergente la limite supérieure de l'intégrale $\Phi_a(\omega)$ reste évidemment finie.

On a:

$$(12) \qquad f(\theta x_0) = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}\left(\theta^{-\frac{1}{a}}-1\right)} \frac{d\Phi_a(\omega)}{d\omega^{\frac{1}{a}}} d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

On obtient par conséquent en faisant l'intégration par partie:

$$(13) \qquad f(\theta x_0) = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}}\left(\frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}} - 1\right) \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}\left(\theta^{-\frac{1}{a}}-1\right)} \Phi_a(\omega) d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

Le second membre de cette égalité converge évidemment pour

$$R\left(\frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}}\right) > 1$$

θ étant ou réel ou complexe, c'est à dire il converge pour

$$R\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{a}}\right) > 1,$$

Par conséquent:

B. »L'intégrale

$$f(x_0) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

étant convergente, la transformée de l'intégrale

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

à savoir l'intégrale:

$$(14) \qquad \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right)} \Phi_\alpha(\omega) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

où

$$\Phi_\alpha(\omega) = \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

est convergente tant que

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1.\text{»}$$

L'intégrale

$$\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right)} \Phi_\alpha(\omega) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

représente évidemment pour chaque domaine

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1; \quad \begin{array}{ll} 2k\pi - \alpha\frac{\pi}{2} < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < 2k\pi + \alpha\frac{\pi}{2} & (\text{si } 0 < \alpha < 2) \\ 2k\pi - \pi < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < 2k\pi + \pi & (\text{si } \alpha > 2) \end{array}$$

$$k = -\infty \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \infty$$

une branche fonctionnelle. Cette branche est en général pour chaque domaine différent la branche d'une fonction différente. La seule considération intéressante pour l'instant est celle du domaine qui correspond à $k = 0$. Ce domaine embrasse le vecteur $(0x_0)$, et l'égalité

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega\theta x_0)\,d\omega^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}}\left(\frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}} - 1\right)\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}\left(\theta^{-\frac{1}{a}}-1\right)} \Phi_a(\omega)\,d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

a lieu pour les valeurs positives de θ, $\theta_0 \leqq \theta \leqq 1$. Par conséquent:

C. »L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x_0)\,d\omega^{\frac{1}{a}}$$

étant convergente, l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x)\,d\omega^{\frac{1}{a}}$$

représente sur le vecteur $(\theta_0 x_0, x_0)$, où θ_0 est une quantité positive si petite qu'elle soit, une fonction analytique de x.»

Les théorèmes ***B*** et ***C*** sont encore valables comme l'était auparavant le théorème ***A*** quand la seule condition à laquelle soit assujettie la fonction $F_a(\omega x)$ est que l'expression $e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x)\,d\omega^{\frac{1}{a}}$ sera intégrable.

Dans notre cas où la fonction $F_a(x)$ est définie par l'égalité (5) nous montrerons que la fonction analytique qui est représentée le long du vecteur $(0x_0)$ par l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x)\,d\omega^{\frac{1}{a}}$$

est identique à la fonction $FC(x)$ et à la continuation analytique de $FC(x)$ le long du même vecteur.

En realité on sait que

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}\,\omega^\nu d\omega^{\frac{1}{a}} = \int_0^\infty e^{-\omega}\omega^{a\nu}d\omega = \Gamma(a\nu+1) = \underline{|a\nu}.$$

A cause de la supposition exprimée par la formule (1) on peut toujours en déterminant un nombre positif ε aussi petit que l'on voudra trouver un entier positif n tel que l'on ait

$$\sum_{\nu=n}^\infty |k_\nu|\cdot|x|^\nu < \frac{\varepsilon}{2}$$

pourvu que

$$|x| \leq r' < r.$$

Pour ce domaine de x, en désignant par ω' et ω'' deux quantités positives telles que $\omega' < \omega''$ on aura donc

$$\sum_{\nu=n}^\infty \frac{|k_\nu|}{\underline{|a\nu}} \int_{\omega'^{\frac{1}{a}}}^{\omega''^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}\,\omega^\nu d\omega^{\frac{1}{a}}\,|x|^\nu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part pour ce même domaine de x en choisissant ω' suffisamment grand on aura

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{|k_\nu|}{\underline{|a\nu}} \int_{\omega'^{\frac{1}{a}}}^{\omega''^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}\,\omega^\nu d\omega^{\frac{1}{a}}\,|x|^\nu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, en prenant ε et r' arbitrairement on peut toujours trouver un nombre positiv ω' suffisamment grand pour que

$$(16) \qquad \sum_{\nu=0}^\infty \frac{|k_\nu|}{\underline{|a\nu}} \int_{\omega'^{\frac{1}{a}}}^{\omega''^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}\,\omega^\nu d\omega^{\frac{1}{a}}\,|x|^\nu < \varepsilon$$

pourvu que

$$|x| \leqq r' < r.$$

La série de puissances

(5) $$F_a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\lfloor a\nu} x^\nu$$

est toujours convergente. Il en est donc de même de la série:

$$e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^\nu}{\lfloor a\nu} x^\nu$$

considérée par rapport à $\omega^{\frac{1}{a}}$. On obtient donc $\int e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}$ en intégrant chaque terme separément et on a le droit d'écrire

(17) $$\int_{\omega'^{\frac{1}{a}}}^{\omega''^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\lfloor a\nu} \int_{\omega'^{\frac{1}{a}}}^{\omega''^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{a}} x^\nu.$$

On a par suite en vertu de (16)

(18) $$\left| \int_{\omega'^{\frac{1}{a}}}^{\omega''^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} \right| < \varepsilon$$

pourvu que

$$|x| \leqq r' < r.$$

L'intégrale

(9) $$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

regardée comme fonction de x est donc uniformément convergente dans chaque domaine

$$|x| \leqq r' < r.$$

On a maintenant en désignant par $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ une suite de constantes positives croissant au delà de toute limite:

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} = \int_0^{\omega_1^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\omega_\nu^{\frac{1}{a}}}^{\omega_{\nu+1}^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

$$= k_0 + \frac{k_1}{|\underline{a.1}} \int_0^{\omega_1^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega d\omega^{\frac{1}{a}} x + \frac{k_2}{|\underline{a.2}} \int_0^{\omega_1^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^2 d\omega^{\frac{1}{a}} x^2 + \ldots$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| k_0 + \frac{k_1}{|\underline{a.1}} \int_{\omega_\nu^{\frac{1}{a}}}^{\omega_{\nu+1}^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega d\omega^{\frac{1}{a}} x + \frac{k_2}{|\underline{a.2}} \int_{\omega_\nu^{\frac{1}{a}}}^{\omega_{\nu+1}^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^2 d\omega^{\frac{1}{a}} x^2 + \ldots \right|$$

égalité valable pour le domaine $|x| \leqq r' < r$.

On a donc en vertu du théorème fondamental de WEIERSTRASS [1]

$$(19) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu x^\nu = FC(x)$$

égalité valable au moins pour chaque domaine à l'intérieur du cercle de convergence C de la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu x^\nu$.

La fonction analytique qui, l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

[1] KARL WEIERSTRASS. *Zur Functionenlehre.* Werke. Bd. 2, pag. 205.

On voit donc en vertu du théorème D et de la définition de $B^{(\alpha)}$ que le point x_0 ne peut pas être situé en dehors de $B^{(\alpha)}$.

Par conséquent:

E. »Faisons parcourir à x_0 tous les points à l'intérieur de l'étoile principale A définie par les constantes $k_0, k_1, \ldots, k_\mu, \ldots$ pour lesquelles le domaine

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1\,; \qquad \begin{array}{ll} -\alpha\frac{\pi}{2} < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \alpha\frac{\pi}{2} & (\text{si } 0 < \alpha < 2) \\ -\pi < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \pi & (\text{si } \alpha \geq 1) \end{array}$$

est situé à l'intérieur de A et désignons par $B^{(\alpha)}$ l'étoile qui est obtenue de cette manière.

L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

ne peut jamais être convergente en dehors de $B^{(\alpha)}$.»[1]

Il reste maintenant à voir si l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ qui ne peut pas être convergente en dehors de $B^{(\alpha)}$ converge partout à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$. C'est seulement si cette circonstance a lieu et si la convergence est uniforme pour tout domaine à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$ que $B^{(\alpha)}$ est en réalité une étoile de convergence à notre intégrale.

On ne voit pas au premier abord la possibilité d'étendre au cas général où α est quelconque la démonstration que j'ai employée dans la note 4, § 2, pour le cas $\alpha = 1$. Il faut donc chercher une autre voie.

Je simplifierai d'abord le problème en introduisant au lieu de $F(x)$ la fonction élémentaire $\frac{1}{1 - x}$.

Je démontrerai ensuite qu'on peut ramener le cas général à ce cas.

[1] En parcourant de nouveau ma note 4 j'ai remarqué une omission dans la démonstration page 378. J'y suppose tacitement $\frac{1}{x_0 - a}$ réel et je ne mentionne pas le cas général qui se ramène du reste immédiatement au cas réel.

MM. PHRAGMÉN et BOREL[1] de leur côté ont démontré que si l'on sait développer $\frac{1}{1-x}$ en une série dont les termes différents sont des fonctions rationnelles de x, on obtient immédiatement le développement de $F(x)$ en une pareille série. Lorsqu'ils ont publié leurs résultats ils n'ont pas remarqué que j'avais démontré ce même théorème il y a déjà plus de vingt et un ans.[2]

---

[1] ÉMILE BOREL. *Addition au mémoire sur les séries divergentes.* Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. T. 16. Année 1899, pag. 132—134.

E. PHRAGMÉN. *Sur une extension d'un théorème de Mittag-Leffler.* Comptes Rendus 12 juin 1899.

[2] *Fullständig analytisk framställning af hvarje entydig monogen funktion, hvars singulära ställen utgöra en värdemängd af första slaget.* Öfversigt af K. Vet. Ak. Förhandl. 8 febr. 1882.

J'y ai démontré (pag. 25, 26) la formule

$$F(x) = B_0 k_0 + B_1 k_1 x + \ldots + B_n k_n x^n + \frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(z)\left[\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z}\left(B_0 + B_1\frac{x}{z} + \ldots + B_n\left(\frac{x}{z}\right)^n\right)\right]dz$$

où $B_0, B_1, \ldots, B_n$ sont des constantes par rapport à z mais non par rapport à x, et où S est un contour limitant une surface simplement connexe pour laquelle $F(z)$ est régulière. J'ai même donné la formule sous la forme plus générale

$$F(x) = B_0 k_0 + B_1 k_1 x + \ldots + B_n k_n x^n + \sum_{\nu=0}^{m}\left[G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) - \sum_{\mu=0}^{m-1} B_\mu A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right]$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(z)\left[\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z}\left(B_0 + B_1\frac{x}{z} + \ldots + B_n\left(\frac{x}{z}\right)^n\right)\right]dz$$

où la fonction, uniforme pour la surface limitée par S et régulière sur le contour S lui-même, possède un nombre limité de points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_m$ à l'intérieur de S; et où $G_1(z), \ldots G_m(z)$ sont des fonctions entières définies par l'égalité

$$F(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + \mathfrak{P}(x - a_\nu)$$

qui a lieu dans le voisinage de a_ν, l'égalité

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu$$

Si dans ce mémoire je n'ai pas eu recours auparavant à la méthode qui consiste à ramener l'étude de $F(x)$ à celle de $\frac{1}{1-x}$ c'est pour les deux raisons suivantes.

Mes développements seraient dans les deux cas devenus au fond absolument les mêmes et j'aurais obtenu par conséquent une simplification plutôt formelle que réelle.[1]

En second lieu — et c'est la raison qui m'a déterminé pour mes trois premières notes — j'ai voulu arriver au but par des considérations directes et purement élémentaires, et par conséquent sans avoir recours à l'intégrale de CAUCHY. Mais la méthode qui consiste à ramener le développement de $F(x)$ au développement de $\frac{1}{1-x}$ présuppose essentiellement le passage par l'intégrale de CAUCHY. Or dans cette note le cas n'est plus le même et la simplification à laquelle on arrive en étudiant d'abord

$$F(x) = \frac{1}{1-x}$$

devient d'une importance capitale.

---

ayant lieu dans le voisinage de $x = 0$. Ma formule montre immédiatement qu'en ayant

$$\frac{1}{z-x} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{z}\left(B_0 + B_1 \frac{x}{z} + \ldots + B_n \left(\frac{x}{z}\right)^n\right)$$

à l'intérieur d'une figure génératrice (c. f. troisième note, page 219) passant par les points 0, x et enveloppant la ligne $(0x)$ l'égalité

$$F(x) = \lim_{n=\infty} (B_0 k_0 + B_1 k_1 x + \ldots + B_n k_n x^n)$$

a lieu pour une étoile E qu'on obtient en construisant autour de chaque vecteur issu de l'origine la plus grande des figures génératrices qui n'embrasse aucun point singulier de $F(x)$ et en adjugeant à E la partie du vecteur entre l'origine et x.

C'est justement le même théorème qui à été démontré par MM. BOREL et PHRAGMÉN.

[1] Les auteurs qui ont parlé de la simplification de ma première démonstration à laquelle d'autres auteurs seraient arrivés après moi (voir p. ex. PRINGSHEIM, JACQUES HADAMARD. *La série de Taylor et son prolongement analytique.* Archiv d. Math. und Physik. 3 Reihe. Bd. 3, pag. 289) ne paraissent pas avoir saisi le fond de ma pensée.

§ 2.

En faisant

$$F(x) = \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots \tag{20}$$

on obtient pour $F_\alpha(x)$ la série:

$$E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\lfloor \alpha\nu}. \tag{9}$$

Dans le paragraphe actuel j'aborderai l'étude de la fonction $E_\alpha(x)$ à l'aide de la formule sommatoire de MACLAURIN éclaircie par les méthodes d'ABEL et de CAUCHY.[1]

J'imposerai encore au nombre positif α la restriction suivante:

$$2 \geqq \alpha > 0. \tag{21}$$

Désignons par ε une quantité positive plus petite que un et par n un nombre entier positif. Soit R un rectangle dont deux côtés situés à la distance n de part et d'autre de l'axe réel sont parallèles à cet axe et dont les deux autres perpendiculaires à cet axe passent l'un par le point $-\varepsilon$ et l'autre par le point $n + 1 - \varepsilon$.

Nous aurons:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\lfloor \alpha\nu} = \int^{R} \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{x^z}{\lfloor \alpha z} dz. \tag{22}$$

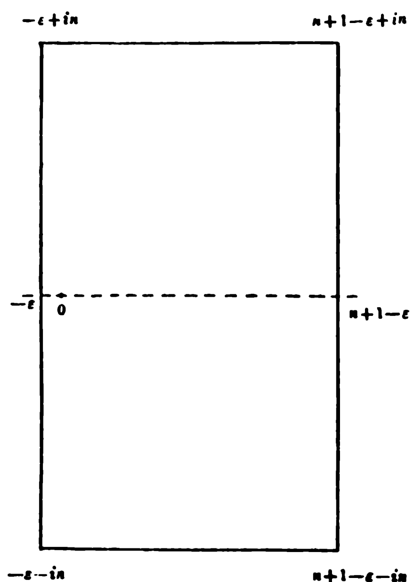
---

[1] Voir par exemple:

JULIUS PETERSEN. *Vorlesungen über Functionstheorie.* Kopenhagen. Andr. Fr. Høst & søn 1898. Kapitel 8, §§ 78, 79.

HJ. MELLIN. *Die Dirichlet'schen Reihen, die zahlentheoretischen Functionen und die unendlichen Produkte von endlichem Geschlecht.* Acta Soc. Sc. Fennicae. T. 31, n° 2.

ERNST LINDELÖF. *Quelques applications d'une formule sommatoire générale.* Acta Soc. Sc. Fennicae. T. 31, n° 3.



Faisons

$$(23)\qquad \int^{R} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\,\frac{x^z}{\underline{|az}}\,dz = \int^{R_1} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\,\frac{x^z}{\underline{|az}}\,dz + \int^{R_2} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\,\frac{x^z}{\underline{|az}}\,dz$$

où R_1 désigne la ligne $(n+1-\varepsilon\,,\ n+1-\varepsilon+in\,,\ -\varepsilon+in\,,\ -\varepsilon)$ et R_2 la ligne $(-\varepsilon\,,\ -\varepsilon-in\,,\ n+1-\varepsilon-in\,,\ n+1-\varepsilon)$.

En introduisant:

$$(24)\qquad z = \tau + it,$$

$$(25)\qquad x = re^{i\varphi}$$

où τ, t, φ désignent des quantités réelles et où r est le module $|x|$, on trouve:

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \int^{R_1} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\,\frac{x^z}{\underline{|az}}\,dz &= i\int_0^n \frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\,\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon+it)}}\,r^{it}e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}\,dt \\ &\quad - \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{1}{e^{2\pi i\tau-2\pi n}-1}\,\frac{r^{\tau}e^{-\varphi n}}{\underline{|a(\tau+in)}}\,r^{in}e^{i\varphi\tau}\,d\tau \\ &\quad - i\int_0^n \frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\,\frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon+it)}}\,r^{it}e^{-i\varphi\varepsilon}\,dt, \end{aligned}\right.$$

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} \int\limits^{R_1} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\frac{x^z}{\underline{|az}}\,dz = {} & i\int\limits_0^n \frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon-it)}}r^{-it}e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}dt \\ & + \int\limits_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{1}{e^{2\pi i\tau+2\pi n}-1}\frac{r^{\tau}e^{\varphi n}}{\underline{|a(\tau-in)}}r^{-in}e^{i\varphi\tau}d\tau \\ & - i\int\limits_0^n \frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon-it)}}r^{-it}e^{-i\varphi\varepsilon}dt. \end{aligned}\right.$$

Par conséquent:

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} & \int\limits^{R} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\frac{x}{\underline{|az}}\,dz \\ & = i\int\limits_0^n\Bigg[\frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon+it)}} \\ & \qquad\qquad + \frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon-it)}}\Bigg]e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}dt \\ & + \int\limits_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon}\left[\frac{r^{-in}}{e^{2\pi i\tau+2\pi n}-1}\frac{r^{\tau}e^{\varphi n}}{\underline{|a(\tau-in)}} - \frac{r^{in}}{e^{2\pi i\tau-2\pi n}-1}\frac{r^{\tau}e^{-\varphi n}}{\underline{|a(\tau+in)}}\right]e^{i\varphi\tau}d\tau \\ & - i\int\limits_0^n\left[\frac{r^{-it}}{e^{-2i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon-it)}} + \frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon+it)}}\right]e^{-i\varphi\varepsilon}dt. \end{aligned}\right.$$

Pour discuter la formule (28) il nous faut connaître le module de $\frac{1}{\underline{|z}}$. L'expression de WEIERSTRASS nous donne:[1]

[1] Voir par exemple: SCHLÖMILCH. *Compendium der höheren Analysis.* 2ter Band. 3 Aufl., pag. 248.

$$\frac{1}{\Gamma(\tau+it)}\frac{1}{\Gamma(\tau-it)}=e^{C(\tau+it)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\tau+it}{n}\right)e^{-\frac{\tau+it}{n}}\cdot e^{C(\tau-it)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\tau-it}{n}\right)e^{-\frac{\tau-it}{n}}$$

$$=e^{2C\tau}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2\tau}{n}+\frac{\tau^2+t^2}{n^2}\right)e^{-\frac{2\tau}{n}}$$

$$=\left[e^{C\tau}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\tau}{n}\right)e^{-\frac{\tau}{n}}\right]^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{(\tau+n)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{(\Gamma(\tau))^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{(\tau+n)^2}\right).$$

Par conséquent:

$$(29)\quad\begin{cases}\dfrac{1}{|\Gamma(\tau+it)|}<\dfrac{1}{\Gamma(\tau)}\sqrt{\dfrac{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}{2\pi t}}; & \tau\geqq 0,\ +\infty>t>-\infty,\\[2ex] \dfrac{1}{|\Gamma(-\varepsilon+it)|}\leqq\dfrac{1}{|\Gamma(-\varepsilon)|}\sqrt{\dfrac{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}{2\pi t}}\sqrt{1+\dfrac{t^2}{(1-\varepsilon)^2}}; & 0<\varepsilon<1.\end{cases}$$

Considérons maintenant la première intégrale dans le second membre de la formule (28). En vertu de la première formule (29) et puisque le minimum des deux modules $|e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1|$ et $|e^{-2\pi i\varepsilon}-e^{-2\pi t}|$; $0\leqq t$ est une quantité h différente de zéro, on aura:

$$(30)\quad\begin{cases}\left|\displaystyle\int_0^{\infty}\left[\frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\Gamma(a(n+1-\varepsilon+it))}+\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\Gamma(a(n+1-\varepsilon-it))}\right]e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}dt\right|\\[2ex] \qquad\leqq\dfrac{r^{n+1-\varepsilon}}{|\Gamma(a(n+1-\varepsilon))|}\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^{\infty}\left(e^{-\varphi t}+e^{-(2\pi-\varphi)t}\right)\sqrt{\frac{e^{a\pi t}-e^{-a\pi t}}{2a\pi t}}\,dt.\end{cases}$$

L'intégrale du second membre est convergente si φ remplit la condition

$$(31)\qquad 2\pi-a\frac{\pi}{2}\geqq\varphi\geqq a\frac{\pi}{2}.$$

L'expression $\dfrac{r^{n+1-\varepsilon}}{|\Gamma(a(n+1-\varepsilon))|}$ tend indéfiniment vers zéro avec $\dfrac{1}{n}$. Le module de l'intégrale

$$\int_0^{\infty}\left[\frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\Gamma(a(n+1-\varepsilon+it))}+\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\Gamma(a(n+1-\varepsilon-it))}\right]e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}dt$$

s'approche donc indéfiniment de zéro avec $\frac{1}{n}$, tant que φ remplit la condition (31).

Considérons maintenant la seconde intégrale du second membre de la formule (28). On a en vertu de la seconde des formules (29)

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\left|\int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon}\left[\frac{r^{-in}}{e^{2\pi i\tau+2\pi n}-1}\,\frac{r^{\tau}e^{\varphi n}}{\underline{|\alpha(\tau-in)}}-\frac{r^{in}}{e^{2\pi i\tau-2\pi n}-1}\,\frac{r^{\tau}e^{-\varphi n}}{\underline{|\alpha(\tau+in)}}\right]e^{i\varphi\tau}d\tau\right| \\ &<\frac{e^{-(2\pi-\varphi)n}+e^{-\varphi n}}{1-e^{-2\pi n}}\sqrt{1+\frac{n^2}{(1-\varepsilon)^2}}\sqrt{\frac{e^{\alpha\pi n}-e^{-\alpha\pi n}}{2\alpha\pi n}}\int_{-\varepsilon}^{\infty}\frac{r^{\tau}}{\underline{|\alpha\tau}}dt \end{aligned}\right.$$

l'intégrale $\int_{-\varepsilon}^{\infty}\frac{r^{\tau}}{\underline{|\alpha\tau}}d\tau$ ayant une valeur finie. Le second membre de la formule (32) tendra indéfiniment vers zéro avec $\frac{1}{n}$, tant que φ remplira la condition:

$$(33)\qquad 2\pi-\alpha\frac{\pi}{2}>\varphi>\alpha\frac{\pi}{2}.$$

Cette condition suppose essentiellement

$$(34)\qquad 2>\alpha>0.$$

En ajoutant à la condition (21) pour α cette nouvelle condition (34) et en supposant que φ remplit la condition (33) on voit donc que le module de chacune des deux premières intégrales du second membre de (27) tend indéfiniment vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

On obtient donc la formule fondamentale:

$$(35)\qquad E_\alpha(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\underline{|\alpha\nu}}$$

$$=-i\int_0^{\infty}\left[\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|\alpha(-\varepsilon-it)}}+\frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\,\frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|\alpha(-\varepsilon+it)}}\right]e^{-i\varphi\varepsilon}dt.$$

On a:

$$
(36)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left| \int_0^\infty \left[\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon + 2\pi t} - 1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{\varphi t}}{\underline{|\,\alpha(-\varepsilon - it)}} + \frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon - 2\pi t} - 1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{\underline{|\,\alpha(-\varepsilon + it)}} \right] e^{-i\varphi\varepsilon} dt \right| \\
&< \frac{1}{h} \frac{r^{-\varepsilon}}{\underline{|\,-\alpha\varepsilon}} \int_0^\infty (e^{-(2\pi-\varphi)t} + \varepsilon^{-\varphi t}) \sqrt{1 + \frac{t^2}{(1-\varepsilon)^2}} \sqrt{\frac{e^{\alpha\pi t} - e^{-\alpha\pi t}}{2\alpha\pi t}}\, dt.
\end{aligned}
\right.
$$

L'intégrale du second membre est convergente tant que φ remplit la condition (33). Les deux conditions (34) et (33) étant vérifiées l'intégrale du second membre de la formule (35) est par conséquent convergente. Mais la formule (36) nous donne encore un autre renseignement précieux. On a:

$$
\lim_{r=\infty} \frac{r^{-\varepsilon}}{\underline{|\,-\alpha\varepsilon}} = 0
$$

tandis que l'intégrale:

$$
\int_0^\infty (e^{-(2\pi-\varphi)t} + e^{-\varphi t}) \sqrt{1 + \frac{t^2}{(1-\varepsilon)^2}} \sqrt{\frac{e^{\alpha\pi t} - e^{-\alpha\pi t}}{2\alpha\pi t}}\, dt
$$

est indépendante de r.

Par conséquent le théorème suivant à lieu:

F. »Supposons

$$
(34)\qquad 2 > \alpha > 0.
$$

Le module de $E_\alpha(x)$ s'approche indéfiniment de zéro avec $\frac{1}{r}$ quand x tend vers l'infini dans un angle intérieur à l'angle

$$
(33)\qquad 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha\frac{\pi}{2}.«
$$

En faisant $\alpha = 1$ on obtient une propriété connue de la fonction exponentielle $E_1(x) = e^x$. Par ce théorème se trouve encore tranchée une question importante soulevée il y a quelques années par M. Borel.[1]

[1] Intermédiaire des mathématiciens. T. 6, n° 4, avril 1899.

On a:

$$\frac{1}{e^{2\pi iz}-1} = -1 - \frac{1}{e^{-2\pi iz}-1}. \tag{38}$$

Par conséquent,

$$\int^{R_1} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\,\frac{x^z}{\underline{\vert az}}\,dz = -\int^{R_1} \frac{x^z}{\underline{\vert az}}\,dz - \int^{R_1} \frac{1}{e^{-2\pi iz}-1}\,\frac{x^z}{\underline{\vert az}}\,dz. \tag{39}$$

La fonction $\frac{x^z}{\underline{\vert az}}$ se comporte d'une manière régulière à l'intérieur du rectangle $(-\varepsilon\,,\ n+1-\varepsilon\,,\ n+1-\varepsilon+in\,,\ -\varepsilon+in\,,\ -\varepsilon)$ et sur son contour.

Par suite

$$-\int^{R_1} \frac{x^z}{\underline{\vert az}}\,dz = \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{x^\tau}{\underline{\vert a\tau}}\,d\tau. \tag{40}$$

On a d'autre part:

$$\left\{\begin{aligned} &-\int^{R_1} \frac{1}{e^{-2\pi iz}-1}\,\frac{x^z}{\underline{\vert az}}\,dz \\ &= -i\int_0^n \frac{1}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{\vert a(n+1-\varepsilon+it)}}\,r^{it}e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}\,dt \\ &+\int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{1}{e^{-2\pi i\tau+2\pi n}-1}\,\frac{r^\tau e^{-\varphi n}}{\underline{\vert a(\tau+in)}}\,r^{in}e^{i\varphi\tau}\,d\tau \\ &+ i\int_0^n \frac{1}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{\vert a(-\varepsilon+it)}}\,r^{it}e^{-i\varphi\varepsilon}\,dt. \end{aligned}\right. \tag{41}$$

On a donc en vertu des formules (23), (39), (40), (41), (27)

$$
(42)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{\varepsilon}^{R} \frac{1}{e^{2\pi i z}-1}\frac{x^z}{\underline{|\alpha z}}\,dz \\
&= \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{x^\tau}{\underline{|\alpha \tau}}\,d\tau \\
&+ i\int_0^n \Bigg[\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|\alpha(n+1-\varepsilon-it)}} \\
&\qquad\qquad - \frac{r^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|\alpha(n+1-\varepsilon+it)}}\Bigg]e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}\,dt \\
&+ \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \Bigg[\frac{r^{-in}}{e^{2\pi i\tau+2\pi n}-1}\frac{r^{\tau}e^{\varphi n}}{\underline{|\alpha(\tau-in)}} + \frac{r^{in}}{e^{-2\pi i\tau+2\pi n}-1}\frac{r^{\tau}e^{-\varphi n}}{\underline{|\alpha(\tau+in)}}\Bigg]e^{i\varphi\tau}\,d\tau \\
&- i\int_0^n \Bigg[\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|\alpha(-\varepsilon-it)}} - \frac{r^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|\alpha(-\varepsilon+it)}}\Bigg]e^{-i\varphi\varepsilon}\,dt
\end{aligned}
\right.
$$

formule qui est un pendant à la formule (28).

L'intégrale:

$$\int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^\tau}{\underline{|\alpha \tau}}\,d\tau$$

est convergente pour toutes les valeurs de r et de φ. On a pour la seconde intégrale du second membre

$$
(43)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Bigg|\int_0^n \Bigg[\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|\alpha(n+1-\varepsilon-it)}} \\
&\qquad\qquad - \frac{r^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|\alpha(n+1-\varepsilon+it)}}\Bigg]e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}\,dt\Bigg| \\
&\leqq \frac{r^{n+1-\varepsilon}}{\underline{|\alpha(n+1-\varepsilon)}}\frac{1}{h}\int_0^n \left(e^{-(2\pi-\varphi)t}+e^{-(2\pi+\varphi)t}\right)\sqrt{\frac{e^{\alpha\pi t}-e^{-\alpha\pi t}}{2\alpha\pi t}}\,dt.
\end{aligned}
\right.
$$

Le module de cette intégrale tend donc indéfiniment vers zéro avec $\frac{1}{n}$ pourvu que φ remplisse la condition:

$$2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} \geqq \varphi \geqq -\left(2\pi - \alpha\frac{\pi}{2}\right). \tag{44}$$

Quant à la troisième intégrale du second membre de la formule (42) on a:

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon}\left(\frac{r^{-in}}{e^{2\pi i\tau+2\pi n}-1}\frac{r^{\tau}e^{\varphi n}}{\underline{|\alpha(\tau-in)}}+\frac{r^{in}}{e^{-2\pi i\tau+2\pi n}-1}\frac{r^{\tau}e^{-\varphi n}}{\underline{|\alpha(\tau+in)}}\right)e^{i\varphi\tau}d\tau\right| \\ &< \left(e^{-(2\pi-\varphi)n}+e^{-(2\pi+\varphi)n}\right)\sqrt{1+\frac{n^2}{(1-\varepsilon)^2}}\sqrt{\frac{e^{\alpha\pi n}-e^{-\alpha\pi n}}{2\alpha\pi n}}\int_{-\varepsilon}^{\infty}\frac{r^{\tau}}{\underline{|\alpha\tau}}d\tau.\end{aligned}\right. \tag{45}$$

Le module de cette intégrale tend donc indéfiniment vers zéro avec $\frac{1}{n}$ lorsque φ remplit la condition:

$$2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > -\left(2\pi - \alpha\frac{\pi}{2}\right). \tag{46}$$

On obtient par conséquent:

$$E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} \tag{47}$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\infty}\frac{x^\tau}{\underline{|\alpha\tau}}d\tau + i\int_0^{\infty}\left(\frac{r^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|\alpha(-\varepsilon+it)}} - \frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|\alpha(-\varepsilon-it)}}\right)e^{-i\varphi\varepsilon}dt$$

formule qui doit être mise à côté de la formule (35) et où l'intégrale:

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{r^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|\alpha(-\varepsilon+it)}} - \frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|\alpha(-\varepsilon-it)}}\right)e^{-i\varphi\varepsilon}dt \tag{48}$$

est convergente tant que la condition (46) est remplie. Le module de l'intégrale étant inférieur à $Kr^{-\varepsilon}$ où K est une constante indépendante de

r (c. f. la discussion concernant la formule (36)) tend indéfiniment vers zéro en même temps que r augmente au dela de toute limite le long d'un vecteur situé dans l'angle (46). Quant à la quantité positive α la condition (46) revient simplement à

$$4 > \alpha > 0 \tag{49}$$

et la convergence de l'intégrale (48) a lieu sous les deux conditions (49) et (46).

La formule (47) donne:

$$E_1(x) = e^x = e^{re^{i\varphi}} = \int\limits_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^\tau}{|\underline{\tau}} d\tau + \delta_r^{(1)}. \tag{50}$$

Dans cette formule l'argument φ de x est supposé remplir la condition

$$\frac{3\pi}{2} > \varphi > -\frac{3\pi}{2} \tag{51}$$

qui dérive de (46). Le module de $\delta_r^{(1)}$ diminue indéfiniment avec $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{r}$ quand x tend vers l'infini le long d'un vecteur situé dans l'angle (51).

On a:

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^\tau}{|\underline{\alpha\tau}} d\tau = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{-\alpha\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{\frac{\tau}{\alpha}}}{|\underline{\tau}} d\tau.$$

Par suite en vertu de (50) et en y introduisant $\alpha\varepsilon$ au lieu de ε et en désignant par $\delta_r^{(\alpha)}$ la transformée de $\delta_r^{(1)}$ par cette substitution:

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^\tau}{|\underline{\alpha\tau}} d\tau = \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{i\varphi}{\alpha}}} - \frac{1}{\alpha} \delta_r^{(\alpha)}$$

égalité qui exige que la condition

$$\alpha \frac{3\pi}{2} > \varphi > -\alpha \frac{3\pi}{2} \tag{52}$$

soit remplie.

En retournant à la formule (47) on obtient par conséquent le théorème suivant:

G. »Supposons

(49) $$4 > \alpha > 0.$$

Dans le cas où x est situé dans un angle intérieur à l'angle défini par les deux conditions:

(46) $$2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > -\left(2\pi - \alpha\frac{\pi}{2}\right),$$

(52) $$\alpha\frac{3\pi}{2} > \varphi > -\alpha\frac{3\pi}{2}$$

on a:

(53) $$E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}e^{r^{\frac{1}{\alpha}}e^{i\frac{\varphi}{\alpha}}} + \varepsilon_r^{(\alpha)}$$

où le module de $\varepsilon_r^{(\alpha)}$ diminue indéfiniment en même temps que $|x| = r$ augmente au dela de toute limite.»

Les deux théorèmes $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ pris ensemble nous renseignent complètement sur la croissance de $E_\alpha(x)$ dans toutes les différentes directions, pourvu que:

(34) $$2 > \alpha > 0.$$

On pourra donc énoncer le théorème suivant:

Théorème 8 a. La fonction $E_\alpha(x)$ où α désigne une constante positive vérifiant la condition

(34) $$2 > \alpha > 0$$

se comporte quant à sa croissance dans les diverses directions de la manière suivante:

On doit distinguer trois cas différents. Le module de x augmente indéfiniment dans un angle intérieur à l'angle

(33) $$2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha\frac{\pi}{2}.$$

Cette croissance s'obtient au contraire directement si on a égard à l'égalité

$$(53) \qquad E_2(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2} = \frac{e^{r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}}} + e^{-r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}}}}{2}$$

d'où l'on tire

$$(54) \qquad E_2(re^{i\pi}) = E_2(-r) = \cos r^{\frac{1}{2}}.$$

Dans le présent paragraphe nous avons donc complètement épuisé la question relative à la croissance de $E_\alpha(x)$ dans le cas

$$(21) \qquad 2 \geqq \alpha > 0.$$

Je montrerai dans le paragraphe suivant qu'on peut encore arriver à la connaissance complète de la croissance de $E_\alpha(x)$ dans le cas

$$\alpha > 2.$$

§ 3.

Dans le paragraphe précédent j'ai étudié la croissance de la fonction $E_\alpha(x)$ à l'aide de la formule sommatoire de MACLAURIN. La constante α était alors soumise à la restriction

$$(21) \qquad 2 \geqq \alpha > 0.$$

Je suivrai dans ce paragraphe une nouvelle voie et nous verrons que celle-ci nous conduit à la connaissance de la croissance non seulement d'une fonction $E_\alpha(x)$ qui correspond à une valeur α limitée par la restriction (21), mais en même temps à la connaissance de la croissance d'une fonction $E_\alpha(x)$ correspondant à α réel positif quelconque.

Quelque temps après la publication du mémoire de RIEMANN sur les nombres premiers[1] HANKEL publia un mémoire fort remarquable[2] où

[1] *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* Monatsber. der Berl. Academie. Nov. 1859. Ges. Werke. Zweite Aufl. pag. 145.

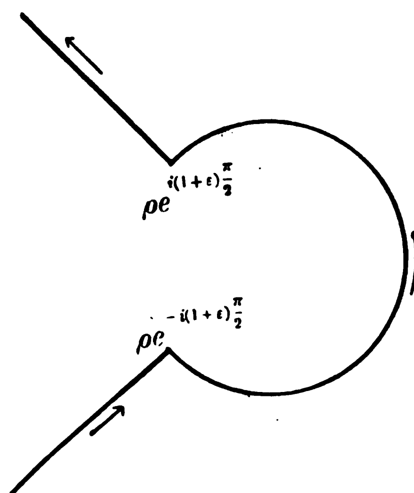
[2] *Die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Argumentes.* Zur Habilitation in der philos. Facultät der Universität Leipzig bearb. von Dr HERMANN HANKEL. In Commission bei Leopold Voss. 1863. Zeitschrift für Math. und Physik. Neuntes Jahrgang, pag. 1—21.

il obtenait une expression pour $\frac{1}{|\underline{z}}$ au moyen d'une intégrale définie analogue à celle donnée auparavant par RIEMANN pour la fonction $\zeta(z)$.[1] Cette expression est:

$$\frac{1}{|\underline{z}} = \frac{1}{2\pi i}\int_S e^t t^{-z}\frac{dt}{t} \tag{55}$$

où le contour S est un contour ouvert laissant l'origine à gauche, parcouru dans le sens positif et qui peut être défini de la manière suivante.

On introduit deux quantités positives ρ et ε dont l'une ε est plus petite que le nombre deux. Le contour se compose de trois lignes différentes. D'abord la partie d'un vecteur, issu de l'origine et ayant pour argument $-i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$ entre l'infini et le point $\rho e^{-i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$. Ensuite l'arc de cercle tracé par l'extremité d'un vecteur de la longueur ρ tournant autour de l'origine dans le sens direct de $\rho e^{-i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ à $\rho e^{i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$. Finalement la partie d'un nouveau vecteur, issue de l'origine et ayant pour argument $i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$, entre le point $\rho e^{i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ et l'infini.



[1] Werke. Zweite Auflage, pag. 146.

Supposons:

$$|x| < \rho^{\alpha}$$

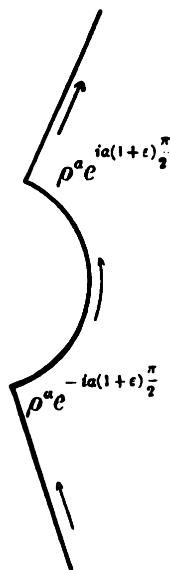
nous aurons:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x_\nu}{\underline{|\alpha\nu}} = \frac{1}{2\pi i} \int^{S} e^{t} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{x}{t^{\alpha}} \right)^{\nu} \right) \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i} \int^{S} \frac{1}{\alpha} e^{t} \frac{dt^{\alpha}}{t^{\alpha} - x}.$$

Faisons

$$t^{\alpha} = \omega$$

et désignons par $\bar{S}$ un nouveau contour ouvert dans le plan des ω laissant l'origine à gauche et formé de la partie entre l'infini et $\rho^{\alpha} e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ d'un vecteur issu de l'origine et ayant pour argument $-i\alpha(1 + \varepsilon)\frac{\pi}{2}$, de l'arc de cercle tracé par l'extremité d'un vecteur de longueur ρ^{α} tournant autour de l'origine dans le sens direct de $\rho^{\alpha} e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ à $\rho^{\alpha} e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ et ensuite de la partie entre $\rho^{\alpha} e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ et l'infini d'un vecteur issu de l'origine et ayant pour argument $i\alpha(1 + \varepsilon)\frac{\pi}{2}$.



Nous aurons:

(56) $$E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{|\underline{\alpha\nu}} = \frac{1}{2\pi i}\int^{\bar{S}} \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{d\omega}{\omega - x}$$

où l'intégrale est prise dans le sens direct. L'intégrale représente une seule et même fonction de x tant que x est situé du même côté de $\bar{S}$ que l'origine.

Regardons le cas:

(34) $$2 > \alpha > 0.$$

La quantité positive ε étant aussi petite qu'on veut, la formule (56) nous montre que $|E_\alpha(x)|$ diminue infiniment avec $\frac{1}{r}$ $(x = re^{i\varphi})$ quand x tend vers l'infini dans un angle intérieur à l'angle

(33) $$2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha\frac{\pi}{2}.$$

C'est le théorème F § 2.

La formule (56) nous renseigne encore sur la croissance de $E_\alpha(x)$ dans l'angle

(37) $$\alpha\frac{\pi}{2} \geqq \varphi \geqq -\alpha\frac{\pi}{2}$$

dans le cas (34) et nous donne dans le cas

(57) $$\alpha \geqq 2$$

la croissance de $E_\alpha(x)$ dans toutes les différentes directions.

Supposons que α étant quelconque x soit situé dans l'angle (37).

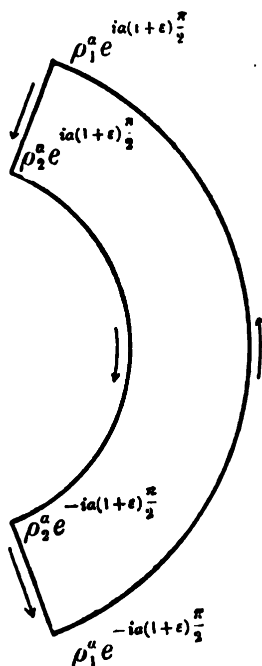
Introduisons deux contours différents à savoir $\bar{S}_1$ correspondant au rayon $\rho = \rho_1$ et $\bar{S}_2$ correspondant au rayon $\rho = \rho_2$ où

$$\rho_2 < |x| < \rho_1.$$

On a:

(58) $$E_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{\bar{S}_1} \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{d\omega}{\omega - x}.$$

Désignons par R un quadrilatère, formé des quatres lignes suivantes. L'arc de cercle tracé par l'extremité d'un vecteur de longueur ρ_1^a tournant autour de l'origine dans le sens direct de $\rho_1^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ à $\rho_1^a e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$. La partie entre $\rho_1^a e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ et $\rho_2^a e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ du vecteur issu de l'origine et ayant pour argument $i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$. L'arc de cercle tracé par l'extremité d'un vecteur de longueur ρ_2^a tournant autour de l'origine dans le sens invers de $\rho_2^a e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ à $\rho_2^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$. Finalement la partie entre $\rho_2^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ et $\rho_1^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ du vecteur issu de l'origine et ayant pour argument $-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$.



On a:

$$(59)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{\bar{S}_1}\frac{1}{a}e^{\omega^{\frac{1}{a}}}\frac{d\omega}{\omega-x}=\frac{1}{2\pi i}\int^{\bar{S}_2}\frac{1}{a}e^{\omega^{\frac{1}{a}}}\frac{d\omega}{\omega-x}+\frac{1}{2\pi i}\int^{R}\frac{1}{a}e^{\omega^{\frac{1}{a}}}\frac{d\omega}{\omega-x}.$$

égalité valable dans l'angle (60) et le théorème 8 a est par conséquent démontré.

La formule (62) nous fournira encore le moyen de faire une étude complète de la croissance de la fonction

$$(65) \qquad E_a(x); \qquad a \geqq 2.$$

Cette fonction est d'une autre nature que la fonction

$$(66) \qquad E_a(x); \qquad 2 > a > 0$$

et paraît bien moins importante. Il est pourtant intéressant de voir que les propriétés caractéristiques des deux fonctions dérivent de la même source.

Pour simplifier nous ferons en sorte que dans l'intégrale

$$(56) \qquad E_a(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{\overline{S}} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x}$$

les parties infinies du chemin d'intégration se confondent toutes deux avec l'axe réel positif (ou dans un cas particulier avec un vecteur voisin de cet axe). Cela est possible parce que dans le cas

$$(57) \qquad a \geqq 2$$

il existe toujours un nombre pair tel que

$$(67) \qquad \frac{a}{2} < 2m < \frac{3a}{2}.$$

Le nombre m étant fixé le chemin d'intégration $\overline{S}$ sera composé des parties suivantes:

1° la partie de l'axe réel extérieur à un cercle d'un certain rayon ρ^a cet axe étant parcouru dans le sens négatif;

2° la circonférence de rayon ρ^a parcourue $2m$ fois dans le sens positif;

3° la partie de l'axe réel nommée dans 1° parcourue dans le sens positif.

Nous déterminerons la fonctions $\omega^{\frac{1}{a}}$ de manière que, au point de l'axe réel où finit la m^e et commence la $(m+1)^e$ circonférence, elle ait une valeur réelle et positive. Grâce à cette détermination on aura, sur les parties du chemin d'intégration situées à distance infinie

$$\omega^{\frac{1}{a}} = \left|\omega^{\frac{1}{a}}\right| e^{\pm\frac{2m}{a}\pi i}$$

ce qui démontre à cause de l'inégalité (67) la convergence de l'intégrale (56).

Revenons maintenant à la formule:

$$E_a(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{R} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x} + \varepsilon_r^{(a)}. \tag{62}$$

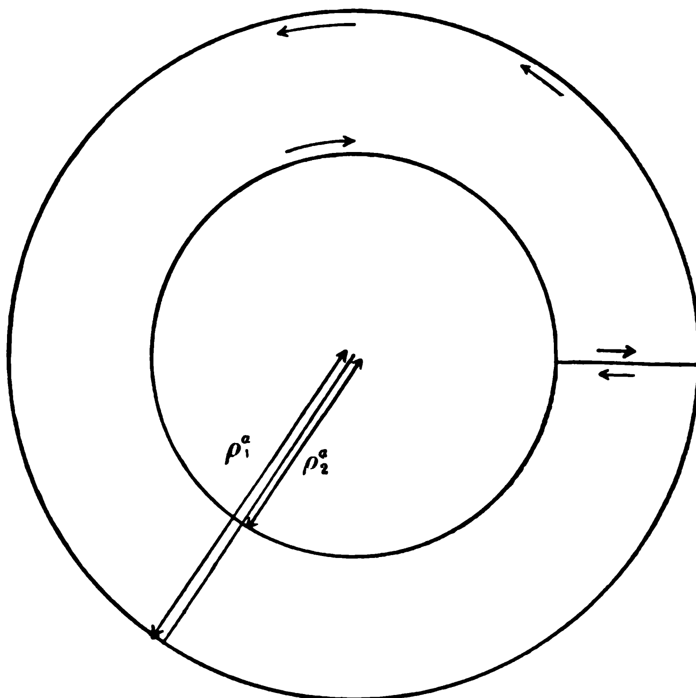
L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{R} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x}$$

se réduit à la somme de $2m$ intégrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x}$$

le chemin d'intégration, qui est le même dans toutes les intégrales, étant celui indiqué dans la figure ci-jointe.



Ce qui est différent dans les diverses intégrales c'est la détermination de la fonction $\omega^{\frac{1}{a}}$. En effet, en posant $\omega = \rho e^{i\theta}$, on doit prendre

dans la $(m + 1)^e$ intégrale: $\omega^{\frac{1}{a}} = \rho^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\theta}{a}}$

. . . .

. . . .

dans la $(m + 1 + \nu)^e$ intégrale: $\omega^{\frac{1}{a}} = \rho^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\theta+2\nu\pi}{a}}$ $(\nu=0,\ldots,m-1)$

. . . .

. . . .

dans la m^e intégrale: $\omega^{\frac{1}{a}} = \rho^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\theta-2\pi}{a}}$

. . . .

. . . .

dans la $(m + 1 - \nu)^e$ intégrale: $\omega^{\frac{1}{a}} = \rho^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\theta-2\nu\pi}{a}}$ $(\nu=1,\ldots,m)$

. . . .

. . . .

Par conséquent en écrivant

(25) $$x = re^{i\varphi}$$

et en supposant

$$0 < \varphi < 2\pi$$

on a pour la $(m + 1 + \nu)^e$ intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x} = \frac{1}{a} e^{r^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\varphi+2\nu\pi}{a}}}. \qquad (\nu=-m\ldots+(m-1))$$

J'ai donc démontré cette formule

(68) $$E_a(x) = \sum_{\nu=-m}^{m-1} \frac{1}{a} e^{r^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\varphi+2\nu\pi}{a}}} + \varepsilon_r^{(a)}$$

formule qui dans les suppositions (57), (67) est valable pour

$$0 < \varphi < 2\pi.$$

Le cas $\varphi = 0$ est resté exclus jusqu'ici. Mais il est facile de modifier la démonstration de manière à embrasser ce cas. En effet en faisant tourner le chemin d'intégration $\overline{S}$ d'un petit angle ε dans le sens négatif on démontre de la même manière que ci-dessus que l'on a toujours

(68) $$E_a(x) = \sum_{\nu=-m}^{m-1} \frac{1}{a} e^{r^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\varphi+2\nu\pi}{a}}} + \varepsilon_r^{(a)}$$

mais avec cette modification que la formule est valable pour

$$-\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon$$

La formule (68) est donc valable encore pour

$$\varphi = 0.$$

On démontre d'une manière analogue qu'elle est valable pour

$$\varphi = 2\pi.$$

Il est donc démontré que la formule (68) a lieu pour

(69) $$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi.$$

Il est évident qu'on peut négliger dans la formule (68) tous les termes pour lesquels on a:

(70) $$\left|\frac{\varphi + 2\nu\pi}{a}\right| > \frac{\pi}{2}.$$

En effet puisque on a dans tous ces termes à cause de (67):

(71) $$\left|\frac{\varphi + 2\nu\pi}{a}\right| \leqq \frac{2m\pi}{a} < \frac{3\pi}{2}$$

chacun d'eux tend vers zéro quand r devient infini.

Nous sommes par conséquent arrivés à la formule finale:

(72) $$E_a(x) = \sum_{(\nu)} \frac{1}{a} e^{r^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\varphi+2\nu\pi}{a}}} + \varepsilon_r^{(a}$$

où la sommation s'étend à tous les nombres ($\nu = -m, \ldots, +(m-1)$) pour lesquels

(73) $$\left|\frac{\varphi + 2\nu\pi}{\alpha}\right| \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Ce résultat peut être résumé dans le théorème suivant.

Théorème 8 b. »La fonction $E_\alpha(x)$ où α désigne une constante positive remplissant la condition

(57) $$\alpha \geqq 2$$

se comporte quant à sa croissance dans les diverses directions de la manière suivante.

Choisissons un nombre entier m qui sera soumis à la restriction

(67) $$\frac{\alpha}{2} < 2m < \frac{3\alpha}{2}.$$

Quand $|x|$ augmente au delà de toute limite le long d'un vecteur quelconque ($x = re^{i\varphi}$; $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$) le module

$$\left|E_\alpha(x) - \sum_{(\nu)} \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\frac{2\nu\pi+\varphi}{\alpha}}}\right|$$

où la sommation s'étend à tous les nombres entiers

$$\nu = -m, -(m-1), \ldots, m-1$$

remplissant la condition

(73) $$\left|\frac{2\nu\pi + \varphi}{\alpha}\right| \leqq \frac{\pi}{2}$$

diminue en même temps indéfiniment.»

On voit que $|E_\alpha(x)|$ tend vers l'infini avec $|x|$ pour tous les vecteurs sauf l'axe réel négatif. On a encore:

$$(74)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{r=\infty} e^{-r^{\frac{1}{a}}} |E_a(r)| = \dfrac{1}{a}, \\ \lim\limits_{r=\infty} e^{-r^{\frac{1}{a}}} |E_a(x)| = 0; \qquad 0 < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Pour l'axe réel négatif on obtient:

$$(75)\qquad E_a(-r) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{2}{a} e^{r^{\frac{1}{a}} \cos \frac{2\nu+1}{a}\pi} \cos\left(r^{\frac{1}{a}} \sin \frac{2\nu+1}{a}\pi\right).$$

La fonction $E_a(x)$ $(\alpha \geqq 2)$ partage donc avec $\sin x$ la propriété que son module augmente au dela de toute limite avec $|x|$ quand x tend vers l'infini le long de tout vecteur, *un seul* excepté. D'autre part le module d'une fonction entière rationnelle $G(x)$ augmente sans exception au de la de toute limite avec $|x|$ quand x tend vers l'infini le long d'un vecteur quelconque.

Il est donc naturel de poser cette question. Existe-il des fonctions entières transcendantes dont le module sans exception comme celui de $G(x)$ augmente avec $|x|$ au de là de toute limite quand x tend vers l'infini le long d'un vecteur quelconque déterminé?

M. Helge von Koch a répondu d'une manière affirmative à cette question [1] en donnant comme exemple la fonction $\overline{G}(x) = x \sin(x + i)$ qui possède évidemment cette propriété. Une autre fonction de cette nature est

$$(76)\qquad \overline{G}(x) = G(x) + E_a(x).$$

On peut exprimer la différence entre la manière dont les fonctions $G(x)$ et $\overline{G}(x)$ tendent vers l'infini en disant que $G(x)$ tend vers l'infini d'une manière uniforme pour toutes les directions tandis que $\overline{G}(x)$ devient infini d'une manière non uniforme. La fonction $G(x)$ de son côté peut être définie par la propriété de tendre vers l'infini d'une manière uniforme.

Une autre question plus profonde se pose ici.

---

[1] Helge von Koch. *Sur une classe remarquable de fonctions entières et transcendentes.* Arkiv f. Mat. Astr. o. Fysik. Stockholm. Bd 1, 9 sept. 1903.

La fonction

$$E_\alpha(x); \qquad 0 < \alpha < 2$$

tend vers l'infini seulement à l'intérieur de l'angle

$$-\alpha\frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha\frac{\pi}{2}.$$

En faisant diminuer α on peut rendre cet angle aussi petit qu'on veut. Est-il possible de former une fonction entière qui ne devienne infinie que si $|x|$ augmente le long d'un seul vecteur, mais qui diminue indéfiniment si $|x|$ augmente le long de tous les autres vecteurs? Un de mes élèves M. J. MALMQUIST est parvenu à donner un tel exemple.[1] La fonction

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{x^{\nu-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{(\log \nu)^\alpha}\right)}; \qquad 0 < \alpha < 1$$

possède cette propriété. Elle tend en réalité indéfiniment vers zéro quand $|x|$ augmente au dela de toute limite le long d'un vecteur déterminé situé dans l'angle

$$0 < \varphi < 2\pi$$

tandis qu'elle augmente au dela de toute limite quand x tend vers l'infini le long de l'axe réel positif. On le démontre facilement en suivant une marche presque identique à celle que j'ai employée dans le § 2.

M. E. LINDELÖF de son côté en se rattachant à ma note préliminaire des Comptes Rendus[2] et en s'appuyant sur un théorème fort remarquable trouvé par lui[3] vient de former la fonction[4]

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\log\left(\nu + \frac{1}{\alpha}\right)}\right)^\nu; \qquad 0 < \alpha < 1$$

---

[1] J. MALMQUIST. *Étude d'une fonction entière.* Acta math. Ce tôme.

[2] 2 mars 1903.

[3] Acta Soc. Sc. Fenn. T. 31, n° 3, pag. 29.

[4] Bull. des Sc. Math. Août 1903, pag. 224—225.

qui possède les mêmes propriétés que celle de M. Malmquist. Une telle fonction est encore la suivante:

$$(77) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu(\log\nu)^{\alpha}} x^{\nu}; \qquad 0 < \alpha < 1.$$

En introduisant dans l'intégrale (56) au lieu de $e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}$ une nouvelle fonction de ω nous rencontrerons dans une note suivante une nouvelle classe de fonctions de cette espèce.[1]

Désignons par $\mathfrak{E}_{\alpha}(x)$ une fonction de cette nature. A l'aide d'une telle fonction on peut répondre à une autre question intéressante. Existe-il des fonctions entières qui tendent indéfiniment vers zéro quand $|x|$ augmente au delà de toute limite le long d'un vecteur *quelconque* déterminé?

La fonction

$$(78) \qquad e^{-\mathfrak{E}_{\alpha'}(x)} - e^{-\mathfrak{E}_{\alpha''}(x)}; \qquad \alpha' \geqq \alpha''$$

possède évidemment cette propriété. On voit sans peine que l'explication de ce phénomène qui paraît d'abord assez paradoxal est que le module de la fonction diminue d'une manière *non-uniforme* quand x tend vers l'infini le long de différentes directions.

Il est facile de voir que dans tous nos exemples la fonction $\mathfrak{E}_{\alpha}(x)$ n'est pas de genre fini. Existe-il de pareilles fonctions de genre fini? La réponse est négative à cause d'un théorème de la plus haute importance qui vient d'être démontré par M. Phragmén[2] et qui n'est pas sans rapport avec les propriétés caractéristiques que j'ai démontrées concernant la fonction $E_{\alpha}(x)$. Ce théorème dans les propres termes de son auteur est le suivant:[3]

»Soit α et ρ deux quantités satisfaisant aux inégalités

$$0 < \alpha < 2, \qquad 0 < \rho < \frac{1}{\alpha}$$

---

[1] c. f. E. Phragmén. *Sur une extension* etc. Ce journal. T. 28, pag. 357, 358. Ainsi que mes deux notes *Un nouveau théorème* etc. Comptes Rendus 11 avril 1904 et *Une nouvelle fonction* etc. Comptes Rendus 18 avril 1904.

[2] *Sur une extension* etc.

[3] c. f. ma note des Comptes Rendus etc. pour le 12 octobre 1903.

et supposons que la fonction entière $E(x)$ satisfasse aux deux conditions suivantes. En posant

$$x = re^{i\varphi}$$

on a

$$1^\circ \qquad |E(x)|e^{-r^\rho} \leqq A \quad \text{pour} \quad -\alpha\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \alpha\frac{\pi}{2}$$

et

$$2^\circ \qquad |E(x)| \leqq B \quad \text{pour} \quad \alpha\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2}$$

A et B étant deux constantes.

Je dis que cette fonction $E(x)$ sera nécessairement une constante.»

Je n'entrerai pas cette fois dans une étude plus approfondie que celle qui vient d'être faite des autres propriétés de la fonction $E_\alpha(x)$. Je laisserai d'abord la parole à M. A. Wiman qui vient de terminer un travail fort intéressant [1] sur la distribution des zéros de cette fonction. Je rappellerai encore que M. E. Phragmén [2] a montré que la fonction $E_\alpha(x)$ est à un certain point de vue la plus simple de son espèce. Pourtant il convient avant de terminer de voir si la propriété qu'a la fonction $E_1(x) = e^x$ de satisfaire à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels en x peut être généralisée à savoir pour $E_\alpha(x)$, α ayant d'autres valeurs que *un*. C'est en réalité ce qui a lieu quand α est rationnel.

Faisons

$$(79) \qquad \alpha = \frac{m}{n}$$

où m et n sont des nombres entiers positifs. On trouve immédiatement en employant la forme symbolique:

$$(80) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d}{d\xi}\right)^m E_{\frac{m}{n}}\left(\xi^{\frac{m}{n}}\right) = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\xi^{-\frac{m}{n}\nu}}{\underline{\left| -\frac{m}{n}\nu \right.}} + E_{\frac{m}{n}}\left(\xi^{\frac{m}{n}}\right), \\ \left(\dfrac{d}{d\xi}\right)^m E_m(\xi^m) = E_m(\xi^m) \end{cases}$$

---

[1] *Über die Nullstellen der Functionen* $E_\alpha(x)$. Ce Tome.

[2] *Sur une extension* etc. T. 28, pag. 357.

ou

$$(81)\quad \begin{cases} \left(\frac{m}{n}x^{1-\frac{n}{m}}\frac{d}{dx}\right)^m E_{\frac{m}{n}}(x) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{x^{\nu-n}}{\underline{\left|\frac{m}{n}(\nu-n)\right.}} + E_{\frac{m}{n}}(x); \qquad n > 1, \\ \left(mx^{1-\frac{1}{m}}\frac{d}{dx}\right)^m E_m(x) = E_m(x). \end{cases}$$

On a donc par exemple:

$$(82)\quad \begin{cases} E'_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\underline{\left|\frac{1}{2}\right.}} + 2xE_{\frac{1}{2}}(x), \\ E'_{\frac{1}{n}}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\underline{\left|\frac{1}{n}\right.}} + \frac{x^2}{\underline{\left|\frac{2}{n}\right.}} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{\underline{\left|\frac{n-1}{n}\right.}}\right) + nx^{n-1}E_{\frac{1}{n}}(x), \\ E''_2(x) + \frac{1}{2x}E'_2(x) - \frac{1}{4x}E_2(x) = 0. \end{cases}$$

§ 4.

Je reprendrai maintenant à l'aide des théorèmes 8 l'étude de l'intégrale

$$(8)\quad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Je la simplifierai d'abord en faisant

$$F_\alpha(x) = E_\alpha(x).$$

Écrivons comme auparavant

$$(25)\quad x = re^{i\varphi}$$

et considérons d'abord le cas

$$(34)\quad 2 > \alpha > 0.$$

A cause du théorème 8a et en désignant par δ une quantité positive qui peut devenir aussi petite que l'on voudra et en faisant croître suffisamment la quantité positive ω, on a:

$$
(83) \quad \begin{cases} \left| e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} |E_\alpha(\omega x)| - e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(1 - r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha}\right)} \right| < \delta e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}; & -\alpha\frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha\frac{\pi}{2}, \\ e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} |E_\alpha(\omega x)| < \delta e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}; & \alpha\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2}. \end{cases}
$$

Il s'ensuit que l'intégrale

$$
(84) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}
$$

est convergente tant que la variable x se trouve du même côté de la ligne

$$
(85) \qquad r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha} = 1; \qquad -\alpha\frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha\frac{2}{\pi}
$$

que l'origine: c'est à dire à l'intérieur de l'étoile de centre zéro limitée par la ligne (85).

Cette ligne qui passe toujours par le point $x = 1$ a dans le cas

$$1 > \alpha > 0$$

une forme d'apparence hyperbolique et possède les deux asymptotes

$$re^{i\alpha\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad re^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}; \qquad 0 < r < \infty.$$

Quand α s'approche de zéro elle s'aplatit donc de plus en plus jusqu'à se confondre avec la ligne droite $(1, +\infty)$.

Dans le cas

$$\alpha = 1$$

elle devient la perpendiculaire à l'axe réel au point $x = 1$. Dans le cas

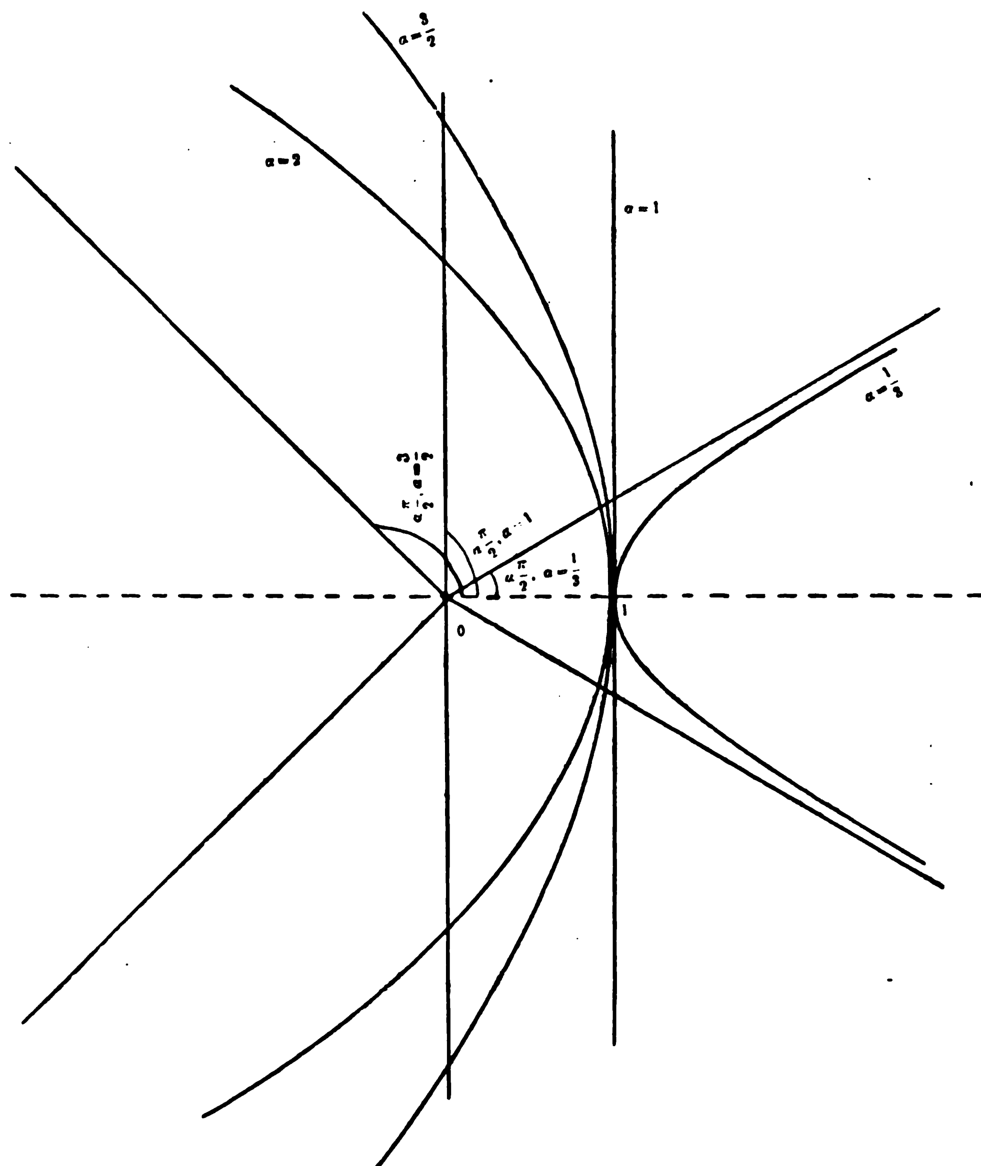
$$2 > \alpha > 1$$

elle a au contraire une forme d'apparence parabolique et s'éloigne quand

φ s'approche des angles $\alpha\frac{\pi}{2}$ et $-\alpha\frac{\pi}{2}$ indéfiniment des deux lignes $re^{i\alpha\frac{\pi}{2}}$ et $re^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}$; $0 \leqq r < +\infty$. Dans le cas

$$\alpha = 2$$

elle devient un parabole.



L'étoile de centre zéro qui est limitée par la ligne

(85) $$r^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi}{\alpha} = 1; \qquad -\alpha \frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha \frac{\pi}{2}$$

est pour l'intégrale

(84) $$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

l'étoile que nous avons déjà désignée au § 1 (Théorème $\boldsymbol{E}$) par $B^{(\alpha)}$. Le théorème $\boldsymbol{E}$ montre que la convergence de l'intégrale ne peut pas avoir lieu en dehors de $B^{(\alpha)}$. L'étoile $B^{(\alpha)}$ est donc une étoile de convergence pour l'intégrale (84). D'autre part il s'ensuit du théorème $\boldsymbol{D}$ que l'égalité

(86) $$\frac{1}{1-x} = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

a lieu partout à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$.

Etudions maintenant l'intégrale (84) dans le cas

(57) $$\alpha \geqq 2.$$

Il s'ensuit du théorème 8 b qu'en faisant croître suffisamment la quantité positive ω et en désignant par δ une quantité positive qui peut devenir aussi petite que l'on voudra on a:

(87) $$\left| e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left| E_\alpha(\omega x) \right| - \frac{1}{\alpha} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(1 - r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha}\right)} \right| < \delta e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(1 - r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha}\right)}; \qquad -\pi \leqq \varphi \leqq \pi.$$

Par conséquent l'intégrale

(84) $$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

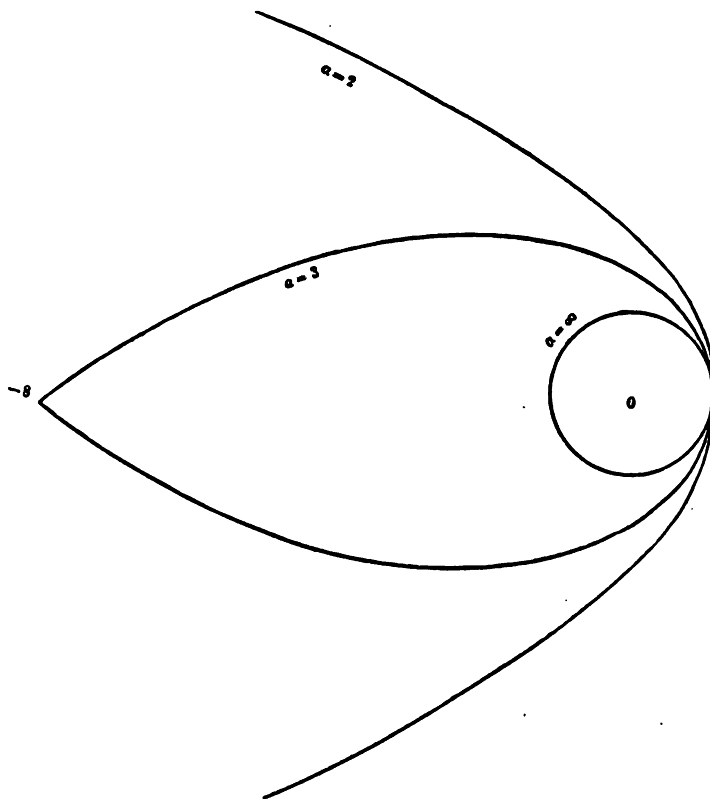
dans la supposition

(57) $$\alpha \geqq 2$$

est convergente à l'intérieur de l'étoile de centre zéro limitée par la ligne

$$(88) \qquad r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha} = 1\,; \qquad -\pi \leqq \varphi \leqq \pi.$$

Cette ligne comme nous l'avons déjà remarqué (page 149) est une parabole pour $\alpha = 2$. Pour $\alpha > 2$ elle devient une ligne fermée symétrique par rapport à l'axe réel et coupant cet axe aux deux points $r = 1$, $\varphi = 0$ et $r = \left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{\alpha}}\right)^{\alpha}$; $\varphi = \pm\pi$. Quand α tend vers l'infini elle s'approche de plus en plus du cercle de centre zéro et de rayon un.



On voit par les mêmes considérations que dans le cas $2 \geqq \alpha > 0$ que l'étoile de centre zéro qui est limitée par la ligne (88) est une étoile de convergence pour l'intégrale (84).

On voit encore que l'égalité

$$(86)\qquad \frac{1}{1-x} = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

a lieu partout à l'intérieur de cette étoile.

Nous sommes donc arrivés au théorème suivant:

Théorème 9. »L'intégrale

$$(84)\qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

où α est une constante positive assujettie à la condition

$$2 \geqq \alpha > 0$$

possède par rapport à $x = re^{i\varphi}$ une étoile de convergence de centre zéro limitée par la ligne

$$(85)\qquad r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha} = 1\,; \qquad -\alpha\frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha\frac{\pi}{2}.$$

On a partout à l'intérieur de cette étoile

$$(86)\qquad \frac{1}{1-x} = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

L'expression

$$(89)\qquad \lim_{\alpha=0} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

possède par rapport à x une étoile de convergence de centre zéro formée par tout le plan à l'exclusion de la ligne droite $(1\,,\,\infty)$. On a partout à l'intérieur de cette étoile qui est l'étoile principale des constantes $1, 1, 1, \ldots$ l'égalité

$$(90)\qquad \frac{1}{1-x} = \lim_{\alpha=0} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Quand d'autre part

(57) $$\alpha \geqq 2$$

l'intégrale

(84) $$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

possède une étoile de convergence de centre zéro limitée par la ligne

(88) $$r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha} = 1; \qquad -\pi \leqq \varphi \leqq \pi$$

et l'égalité

(86) $$\frac{1}{1-x} = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

a lieu partout à l'intérieur de cette étoile.

L'expression

(91) $$\operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

possède par rapport à x le cercle de convergence de centre zéro et de rayon un et on a partout à l'intérieur de ce cercle

(92) $$\frac{1}{1-x} = \operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.»$$

A l'aide du théorème 9 il est maintenant facile d'arriver à la connaissance complète de l'intégrale générale

(8) $$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Je reviens à mon théorème de 1882 (voir la note page 117) et au lieu de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(z)\left[\frac{1}{z-x}-\frac{1}{z}\left(B_0+B_1\frac{x}{z}+\ldots+B_n\left(\frac{x}{z}\right)^n\right)\right]dz$$

je considère l'intégrale analogue:

$$(93)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(xy)\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right)d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right)dy.$$

L'étoile $B^{(\alpha)}$ a été construite de la manière suivante (Théorème $\boldsymbol{E}$). Autour du vecteur $re^{i\varphi}$ on construit dans le cas

$$2 \geqq \alpha > 0$$

une figure génératrice

$$(94)\qquad \rho = r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^{\alpha}; \qquad -\alpha\frac{\pi}{2} < \psi < \alpha\frac{\pi}{2}$$

et dans le cas

$$\alpha \geqq 2$$

une autre figure génératrice

$$(95)\qquad \rho = r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^{\alpha}; \qquad -\pi \leqq \psi \leqq \pi$$

où ρ, ψ sont des coordonnées polaires relatives au vecteur et où r est déterminé en sorte que la figure appartient entièrement à l'étoile principale A des constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$.[1] Si R désigne la limite supérieure de r le contour limite de $B^{(\alpha)}$ sera décrit par $Re^{i\varphi}$; où φ parcourt les valeurs $0 \leqq \varphi < 2\pi$.

Considérons de plus près la ligne (94). C'est une ligne fermée symétrique par rapport au vecteur r, φ et qui passe par les deux points $\rho = 0$, $\rho = r$. Pour $\alpha = 1$, et c'est le cas de M. Borel elle devient un

[1] voir pour la signification des constantes k page 103.

cercle ayant la droite $(0, \varphi; r, \varphi)$ pour diamètre. L'ordonné du point (ρ, ψ) par rapport à la ligne (r, φ) est $r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^{\alpha}\sin\psi$. On voit donc que la ligne s'aplatit de plus en plus jusqu'à se confondre avec la ligne droite $(0, \varphi; r, \varphi)$ quand α tend vers zéro. Il s'ensuit que l'étoile $B^{(\alpha)}$ s'approche infiniment de l'étoile principale A quand α tend vers zéro.

La ligne (95) au contraire est aussi une ligne fermée symétrique par rapport à la ligne r, φ qu'elle coupe aux deux points r et $-r\left(\cos\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\alpha}$. Elle embrasse donc le point zéro. Quand α tend vers l'infini elle se rapproche infiniment du cercle de centre zéro et de rayon r. L'étoile $B^{(\alpha)}$ s'approche par conséquent infiniment du cercle de centre zéro inscrit dans l'étoile principale A en même temps que α tend vers l'infini.

Revenons à l'intégrale:

$$(93) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(xy)\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy$$

où x sera situé à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$ et S sera un contour fermé qui embrasse la ligne $(0, 1)$ ainsi que la figure génératrice par rapport à cette ligne et qui est tel que le contour correspondent décrit par xy sera en même temps situé à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$.

On a:

$$(96) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(xy)\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy \\ &= F(x) - \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(xy)}{y}\left(\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy \end{aligned}\right.$$

où l'intégrale

$$(97) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(xy)}{y}\left(\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy$$

est prise le long d'un petit cercle de centre zéro. Introduisons dans l'intégrale

$$(98) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} E_a\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

la série qui représente la fonction $E_a\left(\frac{\omega}{y}\right)$; on aura:

$$(99) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int^{(0)} \frac{F(xy)}{y}\left(\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} E_a\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{a}}\right) dy \\ = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(xy)}{y^{\nu+1}} dy \frac{\omega^\nu}{\lfloor a\nu}\right) d\omega^{\frac{1}{a}} \\ = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(z)}{z^{\nu+1}} dz \frac{(\omega x)^\nu}{\lfloor a\nu}\right) d\omega^{\frac{1}{a}} = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}. \end{cases}$$

Par conséquent:

$$(100) \qquad \begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} \\ + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int^{S} F(xy)\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} E_a\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{a}}\right) dy. \end{cases}$$

Pour chaque valeur de y qui appartient à S nous avons

$$(101) \qquad \frac{1}{y-1} = \frac{1}{y}\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} E_a\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{a}};$$

d'où

$$(102) \qquad F(x) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

égalité qui est valable pour chaque domaine X situé à l'intérieur de l'étoile $B^{(\alpha)}$. Si on se remémore maintenant les théorèmes $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{E}$ on voit que l'étoile $B^{(\alpha)}$ est une étoile de convergence de l'intégrale

$$(8) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

L'énoncé donné dans l'introduction de cette note est donc complètement démontré.

J'attirerai encore l'attention sur la formule

$$(103) \qquad FB^{(\alpha)}(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\lfloor \alpha\nu} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^\nu$$

qui est une conséquence immédiate de la formule (99) et où $B^{(\alpha)}$ est une étoile de convergence de l'expression limite du second membre.

La série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\lfloor \alpha\nu} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^\nu$$

est une fonction entière de x qui dépend de deux paramètres ω et α. Elle s'approche indéfiniment de $FB^{(\alpha)}(x)$ quand ω augmente au dessus de toute limite, et de $FA(x)$ quand α s'approche indéfiniment de zéro. Par conséquent:

G a. »Soit $FA(x)$ une branche fonctionnelle quelconque appartenant aux constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots$, dont A est l'étoile principale. On peut toujours à l'aide des constantes k former une fonction entière de x, $G_{\omega,\alpha}(x)$ qui, en outre de x et des k, dépend de deux paramètres positifs ω et α et qui est telle que

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x) = FA(x)$$

et que l'expression

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x)$$

diverge en dehors de A.

On peut choisir $G_{\omega,\alpha}(x)$ de telle manière qu'on obtienne en même temps

$$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x) = FB^{(\alpha)}(x),$$

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x) = FC(x)$$

et que les expressions:

$$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x); \qquad \operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x)$$

divergent, la première en dehors de $B^{(\alpha)}$ et la seconde en dehors de C.»

Si on laisse tomber la condition que l'expression qui aura $FA(x)$ pour limite aura en même temps A pour étoile de convergence, il est facile de choisir la fonction entière de telle manière qu'elle ne dépende que d'un seul paramètre. Nous le verrons dans la suite au § 5. Le théorème est analogue au théorème suivant de WEIERSTRASS[1] auquel le grand analyste attachait une importance spéciale.

g. »Soit $f(x)$ une fonction quelconque réelle et continue de x. Il est toujours possible de former une fonction entière de x, soit $g_\omega(x)$ qui dépend, en outre de x d'un paramètre positif ω et qui est telle que

$$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} g_\omega(x) = f(x)$$

pour toutes les valeurs réelles de x.»

La formule (103) peut être transformée d'une manière intéressante. On a:

$$\sum_{\nu=0}^{n}(k_0 + k_1x + \ldots + k_\nu x^\nu)\left(\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}}\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} - \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n}\frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\nu}}\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^\nu\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\, x^\nu - \left(\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu x^\nu\right)\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^{n+1}}{\underline{|\alpha(n+1)}}\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

[1] WEIERSTRASS. *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente.* Theorem A. Berl. Sitzungsber., 9 Juli 1885. Werke, Bd 3, Pag. 4.

On a de même:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\underline{|an}}\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\,\omega^n\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}} = 0$$

et par conséquent (voir 4[ième] note page 370 la note)

$$\lim_{n=\infty} \left|\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu x^\nu\right| \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\,\omega^{n+1}}{\underline{|\alpha(n+1)}}\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = 0.$$

On obtient donc:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\,\omega^\nu\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\, x^\nu$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

et par suite:

(104) $$FB^{(\alpha)}(x)$$

$$= \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Pour $\alpha = 1$ cette formule devient celle de M. Borel savoir:

$$FB^{(1)}(x) = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \frac{e^{-\omega}\omega^{\nu+1}}{\underline{|\nu+1}}.$$

Le second membre de (104) est uniformément convergent par rapport à x. On peut faire par conséquent:

$$(105)\qquad FB^{(\alpha)}(x)=\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\omega^\nu}{|\underline{\alpha\nu}}-\frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu}k_\mu x^\mu\right]d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

La formule (104) nous fait voir qu'on aurait pu obtenir les quatre formules fondamentales (102), (103), (104), (105) en faisant subir à l'intégrale (93) la transformation

$$(106)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{S}F(xy)\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right)d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{1}{y}\frac{F(xy)}{y-1}\left[\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left(E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right)-y\left(E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right)-1\right)\right)d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right]dy$$

et en appliquant au second membre des considérations tout à fait semblables à celles du § 2 de ma quatrième note.

Nous sommes donc arrivés aux égalités suivantes:

$$(107)\left\{\begin{aligned}&FB^{(\alpha)}(x)-\sum_{\nu=0}^{\infty}(k_0+k_1x+\ldots+k_\nu x^\nu)\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{\omega^\nu}{|\underline{\alpha\nu}}-\frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}}\right)d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\\&=FB^{(\alpha)}(x)-\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\omega^\nu}{|\underline{\alpha\nu}}-\frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu}k_\mu x^\mu\right]d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\\&=FB^{(\alpha)}(x)-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{k_\nu}{|\underline{\alpha\nu}}\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}}x^\nu\end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned}&= FB^{(a)}(x) - \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{a}} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(xy)\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} E_a\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{a}}\right) dy,\end{aligned}\right.$$

$$(108)\left\{\begin{aligned}FB^{(a)}(x) &= \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \left(\frac{\omega^\nu}{|\underline{a\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{a(\nu+1)}}\right) d\omega^{\frac{1}{a}} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\omega^\nu}{|\underline{a\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{a(\nu+1)}}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu} k_\mu x^\mu\right)\right] d\omega^{\frac{1}{a}} \\ &= \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{|\underline{a\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}\, \omega^\nu\, d\omega^{\frac{1}{a}}\, x^\nu \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{a}},\end{aligned}\right.$$

$$(109)\left\{\begin{aligned}&FA(x) \\ &= \operatorname*{Lim}_{a=0}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \left(\frac{\omega^\nu}{|\underline{a\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{a(\nu+1)}}\right) d\omega^{\frac{1}{a}} \\ &= \operatorname*{Lim}_{a=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\omega^\nu}{|\underline{a\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{a(\nu+1)}}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu} k_\mu x^\mu\right)\right] d\omega^{\frac{1}{a}} \\ &= \operatorname*{Lim}_{a=0}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{|\underline{a\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}\, \omega^\nu\, d\omega^{\frac{1}{a}}\, x^\nu = \operatorname*{Lim}_{a=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{a}}.\end{aligned}\right.$$

J'ai obtenu par conséquent le théorème suivant:

Théorème 10. »Désignons par A une étoile de centre a, par α une quantité positive et par $B^{(\alpha)}$ une étoile concentrique à A, inscrite dans A et engendrée dans le cas $2 \geqq \alpha > 0$ par la figure génératrice

$$\rho = r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^{\alpha}; \qquad -\alpha\frac{\pi}{2} \leqq \psi \leqq \alpha\frac{\pi}{2}$$

et dans le cas $\alpha \geqq 2$ par la figure génératrice

$$\rho = r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^{\alpha}; \qquad -\pi \leqq \psi \leqq \pi$$

où ρ et ψ sont des coordonnées polaires relatives au vecteurs $x - a = re^{i\varphi}$; $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$. L'étoile $B^{(\alpha)}$ s'approche infiniment du cercle de centre a inscrit en A quand α tend vers l'infini. Elle augmente continuellement avec $\frac{1}{\alpha}$ et devient pour $\alpha = 1$ l'étoile de Borel (Théorème 7 a). Elle renferme dans son intérieur tout domaine situé à l'intérieur de A pourvu que α soit chosi suffisamment petit.

L'étoile A étant l'étoile principale des constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(\mu)}(a)$, ... assujetties à la condition de Cauchy, l'étoile $B^{(\alpha)}$ est une étoile de convergence pour l'expression:

$$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{|\underline{1}}(x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}}(x-a)^{\nu}\right) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}}\right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{|\underline{\mu}}(x-a)^{\mu}\right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}} \frac{1}{|\underline{\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^{\nu} = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega(x-a)) d\omega^{\frac{1}{\alpha}};$$

$$F_{\alpha}(x-a) = F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{|\underline{1}} \frac{(x-a)}{|\underline{\alpha.1}} + \frac{F^{(2)}(a)}{|\underline{2}} \frac{(x-a)^2}{|\underline{\alpha.2}} + \frac{F^{(3)}(a)}{|\underline{3}} \frac{(x-a)^3}{|\underline{\alpha.3}} + \dots$$

De plus on a l'égalité:

$$FB^{(\alpha)}(x)$$

$$= \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{\lfloor 1}(x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{\lfloor \nu}(x-a)^\nu\right) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^\nu}{\lfloor \alpha\nu} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\lfloor \alpha(\nu+1)}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\omega^\nu}{\lfloor \alpha\nu} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\lfloor \alpha(\nu+1)}\right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{\lfloor \mu}(x-a)^\mu\right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{\lfloor \nu} \frac{1}{\lfloor \alpha\nu} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^\nu$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega(x-a))\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

L'expression limite:

$$\lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{\lfloor 1}(x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{\lfloor \nu}(x-a)^\nu\right)$$

$$\times \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^\nu}{\lfloor \alpha\nu} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\lfloor \alpha(\nu+1)}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \lim_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\omega^\nu}{\lfloor \alpha\nu} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\lfloor \alpha(\nu+1)}\right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{\lfloor \mu}(x-a)^\mu\right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{\lfloor \nu} \frac{1}{\lfloor \alpha\nu} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^\nu$$

$$= \lim_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega(x-a))\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

possède une étoile de convergence identique à l'étoile A et on a l'égalité:

$$FA(x)$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{\underline{|1}}(x-a) + \ldots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{\underline{|\nu}}(x-a)^{\nu}\right)$$

$$\times \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\left(\frac{\omega^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\ +1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{\underline{|\mu}}(x-a)^{\nu}\right)\right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{\underline{|\nu}} \frac{1}{\underline{|\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^{\nu}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega(x-a)) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

D'un autre côté l'expression limite:

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{\underline{|1}}(x-a) + \ldots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{\underline{|\nu}}(x-u)^{\nu}\right)$$

$$\times \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\left(\frac{\omega^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{\underline{|\mu}}(x-a)^{\mu}\right)\right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{\underline{|\nu}} \frac{1}{\underline{|\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^{\nu} = \operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega(x-a)) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= FB^{(a)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{\lfloor\underline{\nu}} \frac{1}{\lfloor\underline{a\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{a}} (x-a)^{\nu}$$

$$= FB^{(a)}(x) - \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega(x-a)) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int^{S} F(z) \left(\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z} \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} E_a\left(\omega \frac{x}{z}\right) d\omega^{\frac{1}{a}} \right) dz$$

qui a lieu partout à l'intérieur de $B^{(a)}$, S désignant un contour fermé embrassant la ligne (ax) ainsi que la figure génératrice par rapport à cette ligne et situé en même temps à l'intérieur de $B^{(a)}$.»

On peut former de plusieurs manières différentes, je le montrerai dans le paragraphe suivant, des formules tout à fait analogues aux formules (107), (108), (109); mais il paraît difficile de les établir de telle manière que l'étoile où elles convergent reste toujours, la fonction étant quelconque, une étoile de convergence. C'était là au contraire, je viens de le démontrer, une propriété fondamentale des formules (108), (109).

§ 5.

Regardons l'intégrale

(110) $$J(x) = \frac{1}{2\pi i} \int^{S} \frac{F(xy)}{y-1} E\left(\omega\left(\frac{1}{y} - 1\right)\right) dy$$

$F(x)$ étant comme toujours défini par l'égalité

(4) $$FC(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots$$

où C est un cercle de centre zéro et de rayon r déterminé par l'égalité:

(1) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left| \sqrt[\nu]{k_\nu} \right| = \frac{1}{r}$$

et $E(x)$ désignant une fonction entière de x telle que

$$E(0) = 1. \tag{111}$$

Le contour S doit faire la limite d'une surface simplement connexe pour laquelle la fonction $F(xy)$ reste régulière. Il doit être parcouru dans le sens direct et embrasser les deux points $y = 0$, $y = 1$.

On a:

$$J(x) = F(x) + \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(xy)}{y-1} E\left(\omega\left(\frac{1}{y} - 1\right)\right)dy \tag{112}$$

ou

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}} \omega^{\nu+1} + J(x). \tag{113}$$

La série

$$E(-\omega + h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E^{(\nu)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} h^\nu$$

étant pour toutes les valeurs de ω toujours convergente par rapport à h on a pour toute valeur de ω

$$\overline{\operatorname{Lim}_{\nu=\infty}} \left| \sqrt[\nu]{\frac{E^{(\nu)}(-\omega)}{\underline{|\nu}}} \right| = 0.$$

D'un autre côté en mettant $r_1 < r$ et en désignant par g_1 la limite supérieure de $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu x^\nu\right|$ pour $|x| = r_1$, on a d'après le théorème de CAUCHY-WEIERSTRASS [1]

$$|k_\mu| \leqq g_1 r_1^{-\mu}$$

et par conséquent

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} |k_\mu x^\mu| \leqq g_1 \frac{1 - \left(\frac{|x|}{r_1}\right)^{\nu+1}}{1 - \frac{|x|}{r_1}} = g_1 \left(\frac{|x|}{r_1}\right)^\nu \frac{1 - \left(\frac{r_1}{|x|}\right)^{\nu+1}}{1 - \frac{r_1}{|x|}}.$$

[1] WEIERSTRASS. Werke. Bd. 1, pag. 67.

La série:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(|k_0|+|k_1x|+\ldots+|k_\nu x^\nu|\right)\frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu+1}}h^{\nu+1}$$

est donc pour toutes les valeurs de x et de ω une série toujours convergente par rapport à h. Elle est encore, ω et h étant fixés, uniformément convergente pour un domaine quelconque de la variable x. Par conséquent (cf. pag. 158)

$$\text{(114)}\qquad \operatorname*{Lim}_{\nu=\infty}\left(|k_0|+|k_1x|+\ldots+|k_\nu x^\nu|\right)\frac{\int\limits_0^{\infty}E^{(\nu+2)}(-\omega)\omega^{\nu+1}\,d\omega}{|\underline{\nu+1}}=0$$

et encore en faisant

$$\frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu+1}}\omega^{\nu+1}=\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu}}\omega^{\nu}-\frac{E^{(\nu+2)}(-\omega)}{|\underline{\nu+1}}\omega^{\nu+1}\right)d\omega$$

et à cause du théorème fondamental de WEIERSTRASS[1]

$$\text{(115)}\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}(k_0+k_1x+\ldots+k_\nu x^\nu)\frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu+1}}\omega^{\nu+1}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}k_\nu\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu}}\omega^\nu d\omega\right)x^\nu.$$

La quantité ω étant fixée, les deux membres de cette égalité sont toujours convergents par rapport à x.

Soit maintenant W un domaine fini dans la variété ω, soit ρ une quantité positive aussi grande qu'on voudra et désignons par g la limite supérieure de $|E(-\omega+h)|$ quand ω appartient à W et h à $|h|\leqq\rho$. On a alors

$$\left|\frac{E^{(\nu)}(-\omega)}{|\underline{\nu}}\right|\leqq g\rho^{-\nu}.$$

En se rappelant la formule

$$|k_\nu|\leqq g_1 r_1^{-\nu}$$

[1] WEIERSTRASS. *Zur Functionenlehre.* Werke. Bd. 2, pag. 205.

on voit donc que

$$\left| k_\nu \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} \right| < (\nu + 1) \frac{gg_1}{(r_1\rho)^\nu} \frac{1}{\rho}.$$

Par conséquent la série:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} (\omega x)^\nu$$

x appartenant à un domaine fini donné, est par rapport à ω uniformément convergente pour un domaine fini quelconque. On a donc le droit de faire

$$(116) \qquad \int_0^\infty \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} (\omega x)^\nu \right] d\omega = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \int_0^\infty \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^\nu d\omega}{\underline{|\nu}} x^\nu.$$

On a par conséquent et à cause de (110), (113), (115) et (116) l'égalité suivante:

$$(117) \quad \left\{ \begin{aligned} & F(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}} \omega^{\nu+1} \\ & = F(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \left(\int_0^\infty \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} \omega^\nu d\omega \right) x^\nu \\ & = F(x) - \int_0^\infty \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} (\omega x)^\nu \right] d\omega \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_\varepsilon^S \frac{F(xy)}{y} \frac{1}{1} E\left(\omega\left(\frac{1}{y} - 1\right)\right) dy. \end{aligned} \right.$$

Nous voyons immédiatement que par un procédé absolument égal au précédent on obtient encore la formule:

$$(118)\qquad F(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty}(k_0 + k_1x + \ldots + k_\nu x^\nu)\frac{1}{E(\omega)}\frac{E^{(\nu+1)}(0)}{\nu+1}\omega^{\nu+1}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(xy)}{y-1}\frac{E\left(\frac{\omega}{y}\right)}{E(\omega)}dy.$$

Pour obtenir les expressions de $F(x)$ que nous cherchons il s'agit donc de trouver des fonctions $E(x)$ telles que le dernier membre, soit de (117) ou de (118), s'approche de zéro en même temps que ω va vers l'infini.

Regardons d'abord la formule (118) et mettons

$$E(x) = E_\alpha(x).$$

Soit $B^{(\alpha)}$ l'étoile de centre zéro appartenant aux constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$ déjà considérée au § 4 et soit x un point à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$. Supposons d'abord

$$(34)\qquad 2 > \alpha > 0.$$

La figure génératrice par rapport à la ligne (01) est

$$\rho^{\frac{1}{\alpha}} = \cos\frac{\psi}{\alpha}; \qquad -\alpha\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \alpha\frac{\pi}{2}.$$

Choisissons pour S un contour qui embrasse cette ligne, et tel que xy soit situé à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$.

Désignons par $\bar{S}$ le contour décrit par $z = \frac{1}{y}$ en même temps que S est décrit par la variable y.

La ligne $\bar{S}$ est fermée, embrasse l'origine et reste toujours extérieure à la ligne

$$\bar{\rho}^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\bar{\psi}}{\alpha} = 1; \qquad (z = \bar{\rho}e^{i\bar{\psi}})$$

qui est la transformée de la ligne $\rho^{\frac{1}{\alpha}} = \cos\frac{\psi}{\alpha}$ au moyen de la substitution $z = \frac{1}{y}$.

On sait que $\operatorname{Lim}_{\omega=\infty} E_\alpha(\omega z)$ s'approche indéfiniment de zéro pour chaque point de S situé dans l'angle

$$2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \psi > \alpha\frac{\pi}{2}$$

et que $\operatorname{Lim}_{\omega=\infty} |E_\alpha(\omega z)| = \frac{1}{\alpha}$ pour les points de S où

$$\bar{\psi} = \pm\alpha\frac{\pi}{2}.$$

On sait encore que

$$\operatorname{Lim}_{\omega=\infty}\left(|E_\alpha(\omega z)| - \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}} \rho^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\psi}{\alpha}}\right) = 0$$

pour chaque point de S qui est situé dans l'angle

$$-\alpha\frac{\pi}{2} < \psi < \alpha\frac{\pi}{2}.$$

D'après la supposition concernant S et $\bar{S}$, la partie de S qui est située dans l'angle

$$-\alpha\frac{\pi}{2} < \bar{\psi} < \alpha\frac{\pi}{2}$$

reste toujours par rapport à la ligne $\rho^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\bar{\psi}}{\alpha} = 1$ du même côté que l'origine. La limite supérieure de $\rho^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\psi}{\alpha}$ dans cet angle est par conséquent toujours plus petite que *un*.

On voit donc que:

$$\operatorname{Lim}_{\omega=\infty} \frac{E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right)}{E_\alpha(\omega)} = 0; \qquad 2 > \alpha > 0$$

pour chaque point de S et on voit encore que $\frac{E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right)}{E_\alpha(\omega)}$ s'approche d'une manière uniforme de zéro pour tous les points de S.

On arrive au même résultat pour

$$\alpha \geq 2.$$

La figure génératrice par rapport à la ligne (01) est alors

$$\rho^{\frac{1}{\alpha}} = \cos\frac{\varphi}{\alpha}; \qquad -\pi \leq \phi \leq \pi$$

et on a (c. f. (87)), δ désignant une quantité positive qui devient infiniment petite avec $\frac{1}{\omega}$:

$$\left| |E_\alpha(\omega z)| - \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}} r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha}} \right| < \delta e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}} r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha}}; \qquad -\pi \leq \phi \leq \pi.$$

Revenons maintenant à la formule (118).

On a:

$$(119) \qquad \lim_{\omega = \infty} \int_1^{\infty} \frac{F(xy)}{y} \frac{E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right)}{E_\alpha(\omega)} dy = 0$$

Par conséquent:

$$(120) \quad \begin{cases} FB^{(\alpha)}(x) = \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \dfrac{1}{E_\alpha(\omega)} \dfrac{E_\alpha^{(\nu+1)}(0)}{|\nu+1} \omega^{\nu+1} \\[2ex] \quad = \lim\limits_{\omega=\infty} \dfrac{1}{E_\alpha(\omega)} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \dfrac{\omega^{\nu+1}}{|\alpha(\nu+1)} \end{cases}$$

égalité valable partout à l'intérieur de l'étoile $B^{(\alpha)}$ et où l'expression:

$$(121) \qquad \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{E_\alpha(\omega)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \frac{\omega^{\nu+1}}{|\alpha(\nu+1)}$$

est uniformément convergente pour tout domaine intérieur à $B^{(\alpha)}$.

On voit l'analogie complète avec l'expression de M. Borel obtient en faisant $\alpha = 1$.

Faisons encore la remarque qu'on peut mettre pour $E(x)$ au $E_\alpha(x)$ une fonction de l'espèce que j'ai considérée page 51; c'es une fonction qui s'approche indéfiniment de zéro quand x tend ver le long d'un vecteur quelconque autre que l'axe réel positif, tand sera une quantité réelle positive croissant au delà de toute lim x tendra vers l'infini le long de l'axe réel positif. En choisissar

$$FB^{(\alpha)}(x) = \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{E_\alpha(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\alpha(\mu+1)}},$$

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{E_\alpha(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\alpha(\mu+1)}}$$

où $E_\alpha(x)$ désigne la fonction:

$$E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\underline{|\alpha\nu}}$$

et où ω est une variable positive.

La première de ces égalités a lieu partout à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$ et la seconde partout à l'intérieur de A. Le second membre de la première égalité est uniformément convergent pour tout domaine intérieur à $B^{(\alpha)}$, le second membre de la deuxième égalité est uniformément convergent pour tout domaine intérieur à A.

Si on s'arrête dans le passage à l'infini à un nombre fini ω on aura l'égalité

$$FB^{(\alpha)}(x) - \frac{1}{E_\alpha(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\alpha(\mu+1)}}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int^{S} \frac{F(z)}{z-x} \frac{E_\alpha\left(\omega \frac{x-a}{z-a}\right)}{E_\alpha(\omega)} dz$$

qui a lieu partout à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$ si on désigne par S un contour fermé qui étant situé à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$ embrasse la figure génératrice par rapport à la droite (ax).

En désignant par $E(x)$ une fonction telle que, pour chaque domaine fini situé en dehors de la partie de l'axe réel compris entre $x = 1$ et l'infini $\frac{E(\omega x)}{E(\omega)}$ s'approche uniformément de zéro lorsque ω augmente au delà de toute limite on a

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \frac{1}{E(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \Big(F(a) + \frac{1}{\underline{1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\Big) \frac{E^{(\nu+1)}(0)}{\nu+1} \omega^{\nu+1}$$

où le second membre est uniformément convergent pour tout domaine à l'intérieur de A.

Si on s'arrête dans le passage à l'infini à un nombre fini ω on a:

$$FA(x)$$
$$-\frac{1}{E(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \Big(F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\Big) \frac{E^{(\nu+1)}(0)}{\nu+1} \omega^{\nu+1}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int^{S} \frac{F(z)}{z-x} \frac{E\left(\omega \frac{x-a}{z-a}\right)}{E(\omega)} d\omega$$

où le contour S est un contour fermé qui étant situé à l'intérieur de A embrasse la droite (ax).»

Revenons maintenant à la formule (117) et faisons y comme auparavant dans la formule (118)

$$E(x) = E_{\alpha}(x).$$

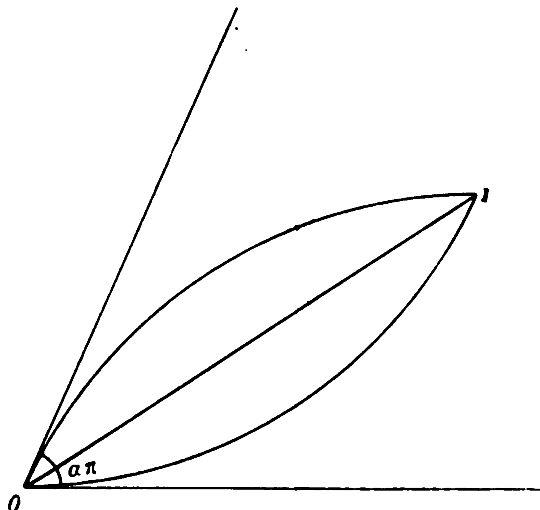
Supposons encore:

$$2 > \alpha > 0.$$

Faisons décrire à la variable y autour de la ligne (01) une figure cunéiforme composée de deux arcs de cercle symétriques par rapport à cette ligne et se coupant aux deux points 0 et 1 sous l'angle $\alpha\pi$.

Désignons par $V^{(\alpha)}$ l'étoile de centre zéro inscrite dans l'étoile principale A qui est engendrée par cette figure cunéiforme comme figure génératrice.[1]

[1] pour la définition de »figure génératrice» engendrant une étoile inscrite dans une autre étoile, voir page 219 de ma troisième note.



C'est, légérement modifiée la même étoile que j'ai discutée autre fois avec M. Vito Volterra.[1]

Choisissons pour S une ligne qui embrasse la figure génératrice par rapport à la ligne (01) en étant en même temps située à l'intérieur de l'étoile $F^{(\alpha)}$. Désignons par $\bar{S}$ une ligne décrite par $z = \frac{1}{y}$ en même temps que y décrit la ligne S. A la figure cunéiforme dans le plan des y qui a la ligne (01) pour axe correspondent dans le plan des z deux demi-droites symmétriques par rapport à l'axe réel passant par le point $z = 1$ et se coupant sous l'angle $\alpha\pi$.

La ligne $\bar{S}$ est donc une ligne fermée qui embrasse l'origine et reste toujours du même côté des deux demi-droites que l'origine. On voit donc, à cause de la propriété connue de la fonction $E_\alpha(x)$, que

$$\lim_{\omega=\infty} E_\alpha(\omega(z-1))$$

s'approche indéfiniment de zéro et d'une manière uniforme, pour tous les points z qui appartiennent à $\bar{S}$.

On a par conséquent:

$$(123) \qquad \lim_{\omega=\infty} \int^{S} \frac{F(xy)}{y-1} E_\alpha\left(\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)\right)dy = 0$$

[1] voir page 229 de ma troisième note.

et on obtient au moyen de la formule (117):

$$(124)\quad \begin{cases} FV^{(\alpha)}(x) = \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \dfrac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}} \omega^{\nu+1}, \\[2ex] FV^{(\alpha)}(x) = \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \left(\displaystyle\int_0^\omega \dfrac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} \omega^\nu d\omega \right) x^\nu, \\[2ex] FV^{(\alpha)}(x) = \displaystyle\int_0^\infty \left(\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \dfrac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} (\omega x)^\nu \right) d\omega. \end{cases}$$

En faisant $\alpha = 1$ on obtient pour l'étoile $V^{(\alpha)}$ l'étoile de M. BOREL que j'ai désignée par $B^{(1)}$. La première et la troisième formule deviennent alors celles de M. BOREL, la seconde celle que j'ai indiquée dans ma quatrième note (formule (37)).

Si on introduit au lieu de $E_\alpha(x)$ une fonction $E(x)$ de l'espèce que j'ai considérée dans mes notes des Comptes Rendus aux dates du 11 et du 18 avril 1904 c'est à dire une fonction telle que $E(0) = 1$ et que, quand la variable réelle et positive ω augmente au dessus de toute limite, $E(\omega x)$ s'approche d'une manière uniforme de zéro pour un domaine fini quelconque de x ne comprenant pas l'axe réel positif, on obtient les formules:

$$(125)\quad \begin{cases} FA(x) = \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \dfrac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}} \omega^{\nu+1}, \\[2ex] FA(x) = \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \left(\displaystyle\int_0^\omega \dfrac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} \omega^\nu d\omega \right) x^\nu, \\[2ex] FA(x) = \displaystyle\int_0^\infty \left(\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \dfrac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} (\omega x)^\nu \right) d\omega \end{cases}$$

où les seconds membres sont uniformément convergents pour chaque domaine fini situé à l'intérieur de l'étoile principale.

Les résultats que nous venons d'obtenir par la considération de la formule (117) peuvent être résumés dans le théorème suivant:

Théorème 11 b. »Désignons par A une étoile de centre a, par α une quantité positive plus petite que 2 et par $V^{(\alpha)}$ une étoile concentrique à A, inscrite en A et engendrée par une figure cunéiforme ayant l'angle $\alpha\pi$ et tournant autour d'un de ses sommets qui doit être situé au centre a. L'étoile A étant l'étoile principale appartenant aux constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\nu)}(a), \ldots$ assujetties à la condition de CAUCHY on a les deux systèmes d'égalités.

$$FV^{(\alpha)}(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\Big(F(a) + \frac{1}{|\underline{1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{|\underline{\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu\Big) \frac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu+1}}\, \omega^{\nu+1},$$

$$FV^{(\alpha)}(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^\infty E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^\nu d\omega}{(|\underline{\nu})^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu,$$

$$FV^{(\alpha)}(x) = \int_0^\infty \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{(|\underline{\nu})^2} F^{(\nu)}(a)(\omega x)^\nu\Big) d\omega,$$

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\Big(F(a) + \frac{1}{|\underline{1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{|\underline{\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu\Big) \frac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu+1}}\, \omega^{\nu+1},$$

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^\infty E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^\nu d\omega}{(|\underline{\nu})^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu,$$

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \int_0^\infty \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{(|\underline{\nu})^2} F^{(\nu)}(a)(\omega x)^\nu\Big) d\omega$$

où $E_\alpha(x)$ désigne la fonction

$$E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{|\underline{\alpha\nu}}$$

et où ω est une variable positive. Le premier système d'égalités a lieu partout à l'intérieur de $V^{(\alpha)}$ et le second partout à l'intérieur de A. Les seconds membres du premier système sont uniformément convergents pour tout domaine à l'intérieur de $V^{(\alpha)}$, les seconds membres du deuxième système sont uniformément convergents pour tout domaine à l'intérieur de A. Si on s'arrête dans le passage à l'infini à un nombre fini ω on aura l'égalité:

$$FV^{(\alpha)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(F(a) + \frac{1}{|\underline{1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|\underline{\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu\right) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\underline{\nu+1}}\, \omega^{\nu+1}$$

$$= FV^{(\alpha)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^\omega E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^\nu d\omega}{(|\underline{\nu})^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$$

$$= FV^{(\alpha)}(x) - \int_0^\omega \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{(|\underline{\nu})^2} F^{(\nu)}(a)(\omega(x-a))^\nu\right) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{F(z)}{z-x} E_\alpha\left(\omega\frac{x-z}{z-a}\right) dz$$

qui a lieu partout à l'intérieur de $V^{(\alpha)}$ si S désigne un contour fermé situé à l'intérieur de $V^{(\alpha)}$ et embrassant la figure génératrice par rapport à la droite (ax).

Si on introduit au lieu de $E_\alpha(x)$ une fonction $E(x)$ telle que $E(\omega x)$ s'approche indéfiniment de zéro quand la variable reelle positive ω augmente au dessus de toute limite tant que x appartient à un domaine fini ne comprenant pas l'axe réel positif, on obtient les formules

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{|1} F^{(1)}(x)(x-a) + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|\nu} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}\right) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\nu+1} \omega^{\nu+1},$$

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} E^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^{\nu} d\omega}{(|\underline{\nu})^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu},$$

$$FA(x) = \int_0^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{(|\underline{\nu})} F^{(\nu)}(a)(\omega(x-a))^{\nu} d\omega$$

où les seconds membres sont uniformément convergents pour tout domaine à l'intérieur de A.

Si on s'arrête dans le passage à l'infini à un nombre fini ω on aura:

$$FA(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{|1} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|\nu} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}\right) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\nu+1} \omega^{\nu+1}$$

$$= FA(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} E^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^{\nu} d\omega}{(|\underline{\nu})^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}$$

$$= FA(x) - \int_0^{\omega} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{(|\underline{\nu})^2} F^{(\nu)}(a)(\omega(x-a))^{\nu} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{F(z)}{z-x} E\left(\omega \frac{x \quad z}{z \quad a}\right) dz$$

où S désigne un contour fermé embrassant la ligne (ax) et situé à l'intérieur de l'étoile A.

REMARQUES SUR UN THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

(Extraits de deux lettres adressées à M. Mittag-Leffler)

PAR

ERNST LINDELÖF.

En étudiant ces derniers temps la théorie des ensembles, j'ai été amené à m'occuper en particulier du théorème fondamental de MM. CANTOR et BENDIXSON,[1] théorème sur lequel M. SCHOENFLIES est revenu dans une publication récente.[2] Les démonstrations de tous ces auteurs reposent sur la notion des nombres transfinis que M. CANTOR a introduits dans l'Analyse. Cependant, la partie la plus importante du théorème en question, celle qui concerne la décomposition d'un ensemble fermé en un ensemble parfait et un ensemble dénombrable, semble assez étrangère à la notion du transfini, et il est donc désirable d'en trouver une démonstration où cette notion n'intervienne pas. C'est aussi, si je ne me trompe, l'opinion que vous avez exprimée lors de notre dernière entrevue. Or, je me suis aperçu qu'on peut y parvenir en apportant à la démonstration de M. BENDIXSON une légère modification qui, en somme, revient à un changement de terminologie. C'est ce que je me permettrai de vous indiquer en quelques mots ci-après.

Quant à la seconde partie du même théorème, la propriété fondamentale des ensembles dérivés, jointe à la seule définition des nombres transfinis, suffit pour l'établir une fois qu'on aura démontré la première

[1] Acta mathematica, t. 2.

[2] Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1903 Heft 1.

Acta mathematica. 29. Imprimé le 5 novembre 1904.

partie. Je n'en parlerai donc pas dans la suite, et je me bornerai à la première partie du théorème qui s'énonce ainsi:

Tout ensemble fermé non dénombrable se compose d'un ensemble parfait et d'un ensemble dénombrable.

1. Toutefois je me placerai d'abord à un point de vue plus général, en considérant un ensemble non dénombrable quelconque, (P), fermé ou non; je suppose cet ensemble situé dans un espace à un nombre fini n de dimensions, ou plutôt, pour simplifier, dans une région limitée T de cet espace, hypothèse qui ne restreint en rien la généralité, puisqu'on peut toujours la réaliser par une projection convenable de l'espace.

Voici maintenant une nouvelle notion que j'introduirai et qui va jouer un rôle fondamental dans la démonstration:

Je dirai qu'un point donné C de la région T constitue *un point de condensation de l'ensemble* (P), si une sphère construite de ce point comme centre, quelque petit qu'on en choisisse le rayon, renferme toujours une infinité non dénombrable de points P.

Cela posé, je démontre successivement les propositions suivantes:

(a) *La région T comprend au moins un point de condensation C de l'ensemble* (P).

La démonstration est analogue à celle par laquelle on prouve qu'il y a dans T au moins un point limite de (P). On peut supposer tout d'abord que la région T affecte la forme d'un cube dont les arêtes sont parallèles aux axes des coordonnées. Divisons T par exemple en 2^n cubes égaux par des plans parallèles aux plans des coordonnées. L'un au moins de ces cubes comprendra nécessairement, à l'intérieur ou à la surface, une partie non dénombrable de l'ensemble (P); car si chacun d'eux n'en comprenait qu'une partie dénombrable, la somme de tous ces ensembles partiels serait également dénombrable et, par suite, il en serait de même de (P). En choisissant donc, suivant une convention déterminée, l'un des cubes qui renferment une infinité non dénombrable de points P, puis en divisant celui-ci en 2^n cubes plus petits, et en continuant de la sorte, on arrivera bien à prouver l'existence d'un point C jouissant de la propriété distinctive des points de condensation.

(b) *L'ensemble C des points de condensation de (P) est un ensemble fermé.*

Soit en effet C' un point limite de l'ensemble (C). Toute sphère décrite de C' comme centre, quelque petite qu'elle soit, comprendra nécessairement des points C dans son intérieur et renfermera par suite, d'après la définition même des points C, une partie non dénombrable de l'ensemble (P). Le point C' est donc lui-même un point de condensation de (P) et figure, par conséquent, dans l'ensemble (C), C. Q. F. D.

En désignant maintenant par (R) l'ensemble des points P qui ne figurent pas dans l'ensemble (C), je démontrerai cette nouvelle proposition:

(c) *L'ensemble (R) est dénombrable.*

A cet effet, je n'ai qu'à répéter une démonstration donnée par M. PHRAGMÉN,[1] en y changeant seulement la terminologie.

Puisque (C) est un ensemble fermé, les distances d'un point donné quelconque de l'ensemble (R) aux différents points C admettront un minimum déterminé δ distinct de zéro. Fixons une suite de nombres positifs décroissant vers zéro:

$$\delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_\nu > \ldots \qquad \left(\lim_{\nu=\infty} \delta_\nu = 0\right),$$

et divisons (R) en des ensembles partiels: $(R_1), (R_2), \ldots, (R_\nu), \ldots\ldots,$ (R_ν) désignant l'ensemble des points de (R) qui vérifient la condition

$$\delta_\nu < \delta \leqq \delta_{\nu-1}.$$

Je dis d'abord que chacun de ces ensembles partiels est dénombrable. En effet, si (R_ν) par exemple était un ensemble non dénombrable, il en existerait au moins un point de condensation dans la région T, d'après la première proposition démontrée ci-dessus. Ce point serait aussi point de condensation pour l'ensemble (P), dont (R_ν) fait partie, et figurerait par suite dans l'ensemble (C). Mais cela est impossible, car le point en question, étant point limite de l'ensemble (R_ν), aura nécessairement une distance $\geqq \delta_\nu$ à l'un quelconque des points C. Donc (R_ν) est bien un

---

[1] Acta mathematica, t. 5.

ensemble dénombrable, et comme nous n'avons qu'une infinité dénombrable de tels ensembles, leur somme, c'est à dire (R), sera également dénombrable, C. Q. F. D.

(d) *L'ensemble* (C) *est parfait.*

Puisque j'ai déjà démontré que cet ensemble est fermé, il ne me reste plus qu'à faire voir qu'il ne saurait renfermer de points isolés. Admettons donc un instant que C_1 soit un point isolé de (C) et, de ce point comme centre, décrivons une sphère S laissant à l'extérieur tous les autres points C. La partie $(P)_S$ de l'ensemble (P) qui est intérieure à cette sphère doit être un ensemble non dénombrable, puisque C_1 en est un point de condensation. Mais, d'autre part, tous les points P compris dans S, excepté le seul point C_1 dans le cas où celui-ci figure dans l'ensemble (P), font partie de l'ensemble (R), et comme celui-ci est dénombrable, d'après la proposition (c), il en doit donc être de même de $(P)_S$. Cette contradiction prouve l'exactitude de la proposition énoncée.

En somme, j'ai donc démontré ce théorème:

Étant donné un ensemble non dénombrable quelconque (P) *situé dans un espace à un nombre fini de dimensions, les points de cet espace qui constituent des points de condensation de l'ensemble* (P) *forment un ensemble parfait* (C), *et les points de* (P) *qui ne figurent pas dans* (C) *forment un ensemble dénombrable* (R).

2. On voit qu'il y a des points P, et même une infinité non dénombrable de ces points, qui figurent dans l'ensemble (C), et on peut ajouter qu'une sphère arbitrairement petite décrite d'un point quelconque C comme centre renfermera toujours une infinité non dénombrable de points P faisant partie de l'ensemble (C). On peut en tirer, en particulier, cette conséquence:

Tout ensemble infini de points, situé dans un espace à un nombre fini de dimensions et tel, qu'autour de chacun de ses points on puisse construire une sphère qui n'en renferme qu'une partie dénombrable, est lui-même un ensemble dénombrable.

Je ferai remarquer qu'en s'appuyant sur cette proposition qui, au premier abord, semble presque intuitive, on peut démontrer en quelques

mots le théorème du n° 1. Il serait donc intéressant de trouver une démonstration directe et simple de la proposition en question.

3. En revenant maintenant aux considérations développées au n° 1, j'introduirai cette nouvelle hypothèse que l'ensemble (P) est *fermé*, c'est à dire qu'il comprend tous ses points limites. Tout point de condensation étant en même temps point limite, on voit que l'ensemble (C) est dans ce cas compris tout entier dans l'ensemble donné (P), de sorte qu'on aura

$$(P) = (R) + (C).$$

C'est là précisément le théorème de MM. BENDIXSON et CANTOR que je voulais démontrer.

Helsingfors, juillet 1903.

II.

Une remarque de M. BOREL, à qui j'avais communiqué le contenu de ma dernière lettre, m'ayant conduit à étudier de nouveau la proposition que j'y ai établie au n° 2, je me suis aperçu qu'on peut la rattacher à un théorème général très élémentaire, qui constitue d'ailleurs l'extension directe d'un théorème de M. BOREL. Par cette voie, on arrive à une nouvelle démonstration du théorème fondamental de MM. CANTOR et BENDIXSON qui me semble remarquable par son caractère direct et intuitif, et que je me permettrai de vous présenter ici.

1. Je commence par démontrer le lemme suivant, qui est d'ailleurs, géométriquement, presque évident.

Étant donné, dans un espace à un nombre fini de dimensions, un ensemble borné quelconque de points, (P), si, de chacun de ses points comme centre, on construit une sphère d'un rayon supérieur ou égal à une longueur donnée r, on pourra toujours choisir un nombre fini de ces sphères de telle sorte que tout point de (P) soit intérieur à l'une d'elles.

Dans l'ensemble (P), je prends au hasard un point P_1, puis je choisis un point P_2 dont la distance à P_1 soit $\geqq r$, puis un point P_3 dont la distance à chacun des points P_1 et P_2 soit $\geqq r$, puis un point P_4 dont la distance à chacun des points P_1, P_2, P_3 soit $\geqq r$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ne trouve plus de point satisfaisant aux conditions requises.

Il est en effet évident que le procédé que je viens de décrire ne saurait fournir qu'un nombre *fini* de points

$$P_1, P_2, P_3, \ldots \tag{1}$$

Pour le faire nettement voir, il suffit de construire de chacun de ces points comme centre une sphère de rayon $\frac{r}{2}$ et, d'autre part, une surface fermée T enveloppant tout l'ensemble (P) et ayant à l'un quelconque de ses points une distance supérieure à $\frac{r}{2}$. Les sphères seront extérieures l'une à l'autre, mais intérieures à la surface T, de sorte que la somme de leurs volumes sera inférieure au volume V limité par cette surface. Donc le nombre n des points (1) sera certainement inférieur à $\frac{V}{v}$, en désignant par v le volume d'une sphère de rayon $\frac{r}{2}$.

Tout point P ayant, d'après ce qui précède, une distance inférieure à r de l'un au moins des points (1), on voit dès lors que les n sphères S correspondant à ces mêmes points jouissent bien de cette propriété, que tout point P est intérieur à l'une d'elles.

2. J'arrive au théorème général annoncé au début de ma lettre.

Théorème. *Étant donné un ensemble quelconque de points, (P), situé dans un espace à un nombre fini de dimensions, si à chaque point P on fait correspondre une sphère S ayant ce point comme centre, on pourra choisir une infinité dénombrable de ces sphères de telle sorte, que tout point de l'ensemble donné soit intérieur à l'une d'elles.*

Comme on peut décomposer un ensemble quelconque en une infinité dénombrable d'ensembles bornés, il suffit évidemment de démontrer le théorème dans le cas où *l'ensemble (P) est borné.*

Fixons une suite indéfinie de nombres positifs décroissant vers zéro:

$$r_1 > r_2 > \ldots > r_{n-1} > r_n > \ldots \qquad \left(\lim_{n=\infty} r_n = 0\right),$$

divisons les sphères S en ensembles partiels

$$(S)_1, (S)_2, \ldots, (S)_n, \ldots,$$

suivant que leurs rayons vérifient les inégalités:

$$r \geqq r_1, \quad \text{resp.} \quad r_1 > r \geqq r_2, \ldots, r_{n-1} > r \geqq r_n, \ldots,$$

et désignons par

$$(P)_1, (P)_2, \ldots, (P)_n, \ldots$$

les parties de l'ensemble (P) formées par les centres des sphères S comprises resp. dans les ensembles précédents.

D'après le lemme démontré ci-dessus, on pourra choisir un nombre fini de sphères de l'ensemble $(S)_1$ de telle sorte que tout point de l'ensemble $(P)_1$ soit intérieur à l'une d'elles; de même un nombre fini de sphères de l'ensemble $(S)_2$ de telle sorte que tout point de l'ensemble $(P)_2$ soit intérieur à l'une d'elles, et ainsi de suite. En somme, on aura donc une infinité dénombrable de sphères S telles que tout point de l'ensemble donné soit intérieur à l'une d'elles au moins, C. Q. F. D.

Si, en particulier, on suppose l'ensemble (P) borné et *fermé*, on peut démontrer qu'il existe un nombre *fini* de sphères S répondant aux conditions voulues. C'est là le théorème de M. Borel [1] dont j'ai parlé au début de cette lettre, et sur lequel il avait bien voulu appeler mon attention.

Du théorème que je viens de démontrer découle immédiatement la proposition suivante, établie au n° 2 de ma dernière lettre:

Étant donné un ensemble de points, (P), situé dans un espace à un nombre fini de dimensions, si, autour de chacun de ses points, on peut construire une sphère qui ne renferme qu'un nombre dénombrable de points P, on peut affirmer que (P) est un ensemble dénombrable.

En effet, d'après le théorème précédent on peut, parmi les sphères envisagées, en choisir une infinité dénombrable de telle sorte que tout point

[1] Comptes rendus, 4 mai 1903. La condition que l'ensemble (P) soit fermé n'y figure pas expressément, évidemment par inadvertance, puisque cette condition joue un rôle essentiel dans la démonstration qu'avait donnée M. Borel p. 42—43 de ses *Leçons sur la théorie des fonctions*, et à laquelle il renvoie dans la note citée.

P soit intérieur à l'une d'elles, et comme chacune de ces sphères, par hypothèse, ne renferme qu'un nombre dénombrable de points P, il s'ensuit bien que l'ensemble (P) est lui-même dénombrable.

3. Après ces préliminaires, voici maintenant avec quelle facilité on établit le théorème fondamental de MM. Cantor et Bendixson:

Tout ensemble fermé non-dénombrable (P), *situé dans un espace à un nombre fini de dimensions, se compose d'un ensemble parfait et d'un ensemble dénombrable.*

Écrivons $(P) = (R) + (C)$, l'ensemble (R) comprenant tout point P tel qu'on puisse l'entourer d'une sphère qui ne renferme qu'une partie dénombrable de (P), et l'ensemble (C) tous les autres points P.

De la dernière proposition démontrée ci-dessus, il résulte immédiatement que *l'ensemble* (R) *est dénombrable* et que, par suite, l'ensemble (C) existe effectivement et comprend une infinité non dénombrable de points.

D'après la définition même de ce dernier ensemble, tout point C jouit de cette propriété qu'une sphère arbitrairement petite ayant ce point comme centre renferme une infinité non dénombrable de points P. Or, l'ensemble (R) étant dénombrable, la sphère considérée renfermera nécessairement aussi des points C, et même une infinité non dénombrable de ces points; d'où cette conséquence que *l'ensemble* (C) *ne comprend pas de points isolés.*

D'ailleurs *tout point limite* C' *de l'ensemble* (C) *fait lui-même partie de cet ensemble.* En effet, le point C' est d'abord compris dans l'ensemble (P), puisque celui-ci est fermé. D'autre part, si de C' comme centre on construit une sphère aussi petite qu'on voudra, celle-ci renfermera à l'intérieur des points C et, par suite, une infinité non dénombrable de points P. Donc C' figure bien dansl'ensemble (C), ce que nous voulions démontrer.

Par conséquent, (C) *est un ensemble parfait,* et la démonstration se rouve ainsi achevée.

Helsingfors, août 1903.

§ 1.

Es sei zunächst $\alpha = \frac{1}{k}$, wo k eine ganze rationale Zahl bedeutet. Die Funktion $E_{k^{-1}}(x)$ genügt der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = kx^{k-1}y + k\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{x^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}.$$

Nach der gewöhnlichen Integrationsmetode erhält man hieraus

$$(2) \qquad y = e^{x^k}\left[c + \int_0^x ke^{-z^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz\right].$$

Soll nun insbesondere $y = E_{k^{-1}}(x)$ sein, so hat man für $x = 0$, $y = 1$, wodurch die Konstante $c = 1$ bestimmt wird. *Es besteht mithin die Identität*

$$(3) \qquad E_{k^{-1}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\Gamma\left(\frac{n}{k}+1\right)} = e^{x^k}\left[1 + \int_0^x ke^{-z^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz\right].$$

Die Reihe $E_{k^{-1}}(x)$ lässt sich in eine Summe von k Partialreihen $E_{k^{-1}}^{(\nu)}(x)$ für $\nu = 0, 1, \ldots, k-1$ zerlegen, so dass

$$(4) \qquad E_{k^{-1}}^{(\nu)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{\nu+kn}}{\Gamma\left(n+\frac{\nu}{k}+1\right)}.$$

Offenbar hat man $E_{k^{-1}}^{(0)}(x) = e^{x^k}$ und für $\nu = 1, \ldots, k-1$

$$(5) \qquad E_{k^{-1}}^{(\nu)}(x) = e^{x^k}\int_0^x ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz.$$

Es ist der in (3) gegebene Ausdruck für $E_{k^{-1}}(x)$, welchen wir hier diskutieren wollen. Dabei sind für $x = re^{i\varphi}$ die folgenden ***drei Hauptfälle*** zu unterscheiden:

1) $$-\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2k};$$

2) $$\frac{4\mu - 1}{2k}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{4\mu + 1}{2k}\pi; \qquad (\mu = 1, \ldots, k-1)$$

3) $$\frac{4\mu + 1}{2k}\pi < \varphi < \frac{4\mu + 3}{2k}\pi. \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Der Hauptsatz, welchen wir beweisen wollen, besagt nun, dass im Falle 1)

$$\lim_{x=\infty} E_{k-1}(x) = ke^{x^k},$$

dagegen in den Fällen 2) und 3)

$$\lim_{x=\infty} E_{k-1}(x) = 0.$$

§ 2.

Es sei also zunächst

$$-\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2k}.$$

Liegt nun x auf der positiven reellen Axe, so ergiebt sich für $\nu > 0$ unmittelbar

(6) $$E_{k-1}^{(\nu)}(x) = e^{x^k}\int_0^\infty ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz - e^{x^k}\int_x^\infty ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz$$

$$= e^{x^k} - e^{x^k}\int_x^\infty ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz.$$

Es handelt sich also um den Wert von

(7) $$F_{k-1}^{(\nu)}(x) = e^{x^k}\int_x^\infty ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz.$$

Durch wiederholte partielle Integration bekommen wir

$$(8)\qquad F_{k-1}^{(\nu)}(x) = \sum_{n=1}^{n_1} \frac{x^{-nk+\nu}}{\Gamma\left(-n+\frac{\nu}{k}+1\right)} + e^{x^k}\int_x^\infty ke^{-z^k}\frac{z^{-n_1k+\nu-1}}{\Gamma\left(-n_1+\frac{\nu}{k}\right)}dz.$$

Für $F_{k-1}^{(\nu)}(x)$ erhält man demnach einen asymptotischen Ausdruck durch die halbkonvergente Reihe

$$(9)\qquad \sum_{n>0} \frac{x^{-nk+\nu}}{\Gamma\left(-n+\frac{\nu}{k}+1\right)},$$

welche in formaler Hinsicht als eine Fortsetzung der Reihe $E_{k-1}^{(\nu)}(x)$ für negative Potenzen von x aufzufassen ist. Bezüglich der hierbei erreichten Genauigkeit, so findet man nach der gewöhnlichen Metode, dass, falls man die Reihe (9) mit dem kleinsten Gliede abbricht, so hat man *den Betrag von $F_{k-1}^{(\nu)}(x)$, abgesehen von einem Restgliede von der Grössenordnung $x^{\frac{k}{2}}e^{-x^k}$.*

Berücksichtigen wir die so erhaltenen Resultate für $\nu = 1, \ldots, k-1$, so ergiebt sich

$$(10)\qquad E_{k-1}(x) = ke^{x^k} - \sum_{\nu=1}^{k-1} F_{k-1}^{(\nu)}(x) = ke^{x^k} - F_{k-1}(x),$$

wo $F_{k-1}(x)$ sich mit einer Genauigkeit von der Grössenordnung $x^{\frac{k}{2}}e^{-x^k}$ durch die halbconvergente Reihe

$$(11)\qquad \sum_{n>0} \frac{x^{-n}}{\Gamma\left(-\frac{n}{k}+1\right)}$$

abschätzen lässt. Es liefert dabei (11) die formale Fortsetzung der Reihe $E_{k-1}(x)$ für negativen Potenzen von x.

Diese Tatsache gilt aber nicht nur für die positive reelle Axe, sondern für jede Stelle $x = re^{i\varphi}$, wenn $-\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2k}$. Wir setzen $X = Re^{i\varphi}$ und beachten, dass

$$(12)\qquad \int ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz = 0,$$

falls man über einen geschlossenen Weg integriert, welcher sich folgendermassen zusammensetzen lässt:

1) aus der positiven reellen Axe von O bis R;

2) aus dem innerhalb unseres Bereiches verlaufenden Kreisbogen RX;

3) aus der geraden Linie XO.

Nimmt man $R = \infty$, so verschwindet das Integral über RX. Die beiden anderen sind also einander entgegengesetzt gleich. Man bekommt mithin

$$\lim_{|x|=\infty} \int_0^x k e^{-z^k} \frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)} dz = 1. \tag{13}$$ [1]

Also wird

$$e^{x^k} \int_0^X k e^{-z^k} \frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)} dz = e^{x^k} - \lim_{|x|=\infty} e^{x^k} \int_x^X k e^{-z^k} \frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)} dz. \tag{14}$$

Da man für letzteres Integral auch in dem hier betrachteten allgemeineren Falle einen asymptotischen Ausdruck durch die halbkonvergente Reihe (9) findet, so ist unsere Behauptung erwiesen.

§ 3.

In ganz anderer Weise gestalten sich die Verhältnisse in einem der $k-1$ Bereiche, für welche $\frac{4\mu-1}{2k}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{4\mu+1}{2k}\pi$ $(\mu = 1, \ldots, k-1)$. Zuerst lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf die halbierende Gerade $\varphi = \frac{2\mu}{k}\pi$. Betrachten wir also eine Stelle x auf dieser Geraden und untersuchen, wie sich die Formel (6) umändert, wenn für den Integrationsweg

---

[1] Für $\varphi = \pm \frac{\pi}{2k}$ konvergiert zwar dieses Integral nicht absolut. Man findet aber leicht, dass, falls man dasselbe in einen reellen und einen imaginären Bestandteil auflöst, diese sich wie Reihen von absolut abnehmenden, abwechselnd positiven und negativen Gliedern verhalten.

die in Rede stehende Gerade dieselbe Rolle wie im vorigen Falle die positive reelle Axe spielt. Es ergiebt sich

$$(6') \qquad E_{k-1}^{(\nu)}(x) = e^{x^k}\int_0^\infty ke^{-|z|^k}\frac{|z|^{\nu-1}e^{\frac{2\mu\nu}{k}\pi i}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}d|z| - e^{x^k}\int_x^\infty ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz$$

$$= e^{x^k}e^{\frac{2\mu\nu}{k}\pi i} - e^{x^k}\int_x^\infty ke^{-z^k}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz.$$

Summieren wir jetzt die $E_{k-1}^{(\nu)}(x)$ für $\nu = 0, 1, \ldots, k-1$, so erhalten wir

$$(15) \qquad E_{k-1}(x) = e^{x^k}\left[1 + \sum_{\nu=1}^{k-1} e^{\frac{2\mu\nu}{k}\pi i}\right] - e^{x^k}\int_x^\infty e^{-z^k}\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz.$$

Nach sehr bekannten Sätzen über Einheitswurzeln ist aber

$$1 + \sum_{\nu=1}^{k-1} e^{\frac{2\mu\nu}{k}\pi i} = 0,$$

so dass

$$(15') \qquad E_{k-1}(x) = -e^{x^k}\int_x^\infty e^{-z^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz = -F_{k-1}(x).$$

Für $F_{k-1}(x)$ hat man aber hier genau wie im vorigen Paragraphen einen asymptotischen Ausdruck durch die halbkonvergente Reihe (11). *Der Unterschied ist also, dass im Ausdruck* (10) *für $E_{k-1}(x)$ das Hauptglied ke^{x^k} hier weggefallen ist.* Das kommt daher, dass im dortigen Bereiche die $E_{k-1}^{(\nu)}(x)$ sich zu einander mit ihren Hauptgliedern wie positive Einheiten verhalten, hier aber wie die Potenzen einer anderen k^{ten} Einheitswurzel als 1.

Diese Bedeutung der Reihe (11) *als asymptotischer Ausdruck von $-E_{k-1}(x)$ behält aber überhaupt im Bereiche, für welche*

$$\frac{4\mu-1}{2k}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{4\mu+1}{2k}\pi,$$

ihre Gültigkeit. Dies ersieht man, indem man, ebenso wie am Ende des vorigen Paragraphen, ein geschlossenes Integral betrachtet; nur soll der Integrationsweg hier in derselben Weise in Bezug auf die halbierende Gerade orientiert sein, wie dort in Bezug auf die positive reelle Axe. *Das wesentliche ist also, dass das Integral* (13), *falls als Integrationsweg irgend eine Gerade in dem hier betrachteten Bereiche gewählt wird, zwar invariant bleibt, aber einen anderen konstanten Wert als* 1, *nämlich* $e^{\frac{2\mu\nu}{k}\pi i}$ *annimmt.*

§ 4.

Es erübrigt noch die Verhältnisse zu untersuchen in den k Gebieten, für welche $\frac{4\mu+1}{2k}\pi < \varphi < \frac{4\mu+3}{2k}\pi$ $(\mu = 0, 1, \ldots, k-1)$. Dass für ein solches Argument φ $\lim\limits_{x=\infty} E_{k-1}(x) = 0$, ist sehr leicht aus (3) zu ersehen. Doch ist die genauere Bestimmung von $E_{k-1}(x)$ hier nicht ohne Schwierigkeit. Zu dem Ende wollen wir auf ein Verfahren einschlagen, welches auch in den vorigen Paragraphen anwendbar wäre. Den Integrationsweg zwischen 0 und x setzen wir aus zwei Stücken zusammen, nämlich aus der Geraden Ox_0 und dem Kreisbogen x_0x, wo wir den Punkt x_0 in solcher Weise wählen, dass der Modul $|x_0| = |x|$ und das Argument $= \frac{2\mu_1}{k}\pi$ wird; die ganze Zahl μ_1 bestimmen wir so, dass $\left|\varphi - \frac{2\mu_1}{k}\pi\right|$ so klein wie möglich ausfällt,[1] wenn φ nach dem Modul 2π genommen wird.

Es sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden.

1) $$\mu_1 = 0.$$

Man bekommt dann nach § 2.

$$(16)\quad E_{k-1}(x) = ke^{x^k} + e^{x^k}\left[\int\limits_{\infty}^{x_0} ke^{-z^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz + \int\limits_{x_0}^{x} ke^{-z^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}dz\right]$$
$$= ke^{x^k} - F_{k-1}(x).$$

---

[1] Durch diese Wahl von μ_1 bekommt man die schärfste obere Grenze für das Restintegral in (17) bei der asymptotischen Darstellung. Ist aber jener kleinste Wert $= \frac{\pi}{2k}$, so hat man für μ_1 zwei Möglichkeiten, welche gleich vorteilhaft sind.

Durch partielle Integration findet man

$$(17)\qquad F_{k-1}(x) = \sum_{n=1}^{n_1} \frac{x^{-n}}{\Gamma\left(-\frac{n}{k}+1\right)} - e^{x^k}\left[\int_{\infty}^{x_0} ke^{-z^k} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{z^{-n_1+\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{-n_1+\nu}{k}\right)}\, dz + \int_{x_0}^{x} ke^{-z^k} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{z^{-n_1+\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{-n_1+\nu}{k}\right)}\, dz\right].[1]$$

2) $\mu_1 > 0.$

Nach § 3 hat man jetzt

$$(16')\qquad E_{k-1}(x) = e^{x^k}\left[\int_{\infty}^{x_0} ke^{-z^k} \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}\, dz + \int_{x_0}^{x} ke^{-z^k} \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{z^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}\right)}\, dz\right] = -F_{k-1}(x),$$

wo wir in ersteren Integral die untere Grenze ∞ in der Richtung $\frac{2\mu_1}{k}\pi$ zu verstehen haben. Offenbar gestattet auch hier $F_{k-1}(x)$ eine Umformung wie (17). Will man nun das Restintegral in (17) abschätzen, so ist es von Bedeutung, dass die Funktion unter dem Integrationszeichen für die obere Grenze $z = x$ ihren grössten absoluten Betrag annimmt, falls man nämlich die Glieder in dem zugehörigen Polynome durch ihre Moduln ersetzt. Vermittelst Betrachtungen, welche, weil das Integral hier komplex ist, von etwas kompliziertere Art als in dem entsprechenden Falle in § 2 sind, findet man, dass n_1 sich so wählen lässt, dass das in Rede stehende

---

[1] Wir machen darauf aufmerksam, dass die rationale Funktion

$$\sum_{\nu=1}^{k} \frac{z^{-n_1+\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{-n_1+\nu}{k}\right)}$$

in Wirklichkeit blos $k-1$ Glieder enthält, weil für $n_1 - \nu =$ eine durch k teilbare Zahl der Nenner $\Gamma\left(\frac{-n_1+\nu}{k}\right)$ unendlich gross wird.

Restglied von der Grössenordnung $x^{\frac{k}{2}} e^{-|x|^k}$ wird. Eine solche Grösse bezeichnen wir mit $\left[x^{\frac{k}{2}} e^{-|x|^k}\right]$.

Wir dürfen also sagen, dass *die Funktion $E_{k^{-1}}(x)$ sich in wesentlich verschiedener Weise verhält, jenachdem φ zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{k}$ und $\frac{\pi}{k}$ eingeschlossen liegt oder nicht. Diese Tatsache findet ihren Ausdruck in den folgenden zwei Relationen, wo man n_1 in geeigneter Weise zu wählen hat.*[1]

1) *Hat man* $-\frac{\pi}{k} < \varphi < \frac{\pi}{k}$, *so gilt*

$$(18)\quad E_{k^{-1}}(x) + \sum_{n=1}^{n_1} \frac{x^{-n}}{\Gamma\left(-\frac{n}{k}+1\right)} = \sum_{n=-n_1}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma\left(\frac{n}{k}+1\right)} = ke^{x^k} + \left[x^{\frac{k}{2}} e^{-|x|^k}\right].$$

2) *In den restierenden Fällen, also für* $\frac{\pi}{k} \leqq \varphi \leqq 2\pi - \frac{\pi}{k}$, *hat man dagegen*

$$(18')\quad E_{k^{-1}}(x) + \sum_{n=1}^{n_1} \frac{x^{-n}}{\Gamma\left(-\frac{n}{k}+1\right)} = \sum_{n=-n_1}^{\infty} \frac{x_n}{\Gamma\left(\frac{n}{k}+1\right)} = \left[x^{\frac{k}{2}} e^{-|x|^k}\right].$$

Man beachte, dass für die Grenzfälle $\varphi = \pm\frac{\pi}{k}$ die Bedeutungen von (18) und (18') identisch sind.

Aus der Gestalt der Formeln (18) *und* (18') *lassen sich unmittelbar Sätze über die mit den $E_{k^{-1}}(x)$ analogen Funktionen*

$$E_{k^{-1},\lambda}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma\left(\frac{n+\lambda}{k}+1\right)}$$

ablesen, wo λ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeuten kann. Durch eine blosse Umformung der genannten Formeln bekommen wir:

---

[1] und zwar in Abhängigkeit von $|x|$.

1) für $-\frac{\pi}{k} < \varphi < \frac{\pi}{k}$

(19)
$$E_{k-1,\lambda}(x) + \sum_{n=1}^{n_1+\lambda} \frac{x^{-n}}{\Gamma\left(\frac{-n+\lambda}{k}+1\right)}$$
$$= \sum_{n=-n_1-\lambda}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma\left(\frac{n+\lambda}{k}+1\right)} = kx^{-\lambda}e^{x^k} + \left[x^{-\lambda+\frac{k}{2}}e^{-|x|^k}\right];$$

2) für $\frac{\pi}{k} \leqq \varphi \leqq 2\pi - \frac{\pi}{k}$

(19')
$$E_{k-1,\lambda}(x) + \sum_{n=1}^{n_1+\lambda} \frac{x^{-n}}{\Gamma\left(\frac{-n+\lambda}{k}+1\right)}$$
$$= \sum_{n=-n_1-\lambda}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma\left(\frac{n+\lambda}{k}+1\right)} = \left[x^{-\lambda+\frac{k}{2}}e^{-|x|^k}\right].$$

Entsprechende Sätze gelten aber noch für den Fall, dass λ keine ganze Zahl ist; Zwar folgen sie dann nicht als Korollare aus (18) und (18'), aber man kann leicht unsere nur auf die Funktionen $E_{k-1}(x)$ bezugnehmenden Rechnungen für die allgemeinere Funktionenklasse $E_{k-1,\lambda}(x)$ durchführen.

§ 5.

Die Teorie der Funktionen $E_\alpha(x)$, wo α eine rationale Zahl $\frac{h}{k}$ ist, lässt sich auf den Fall, dass $\alpha = k^{-1}$ ist, zuruckführen. Es besteht ja die Identität

(20)
$$E_{\frac{h}{k}}(x) = \frac{1}{h}\left[E_{k^{-1}}\left(x^{\frac{1}{h}}\right) + E_{k^{-1}}\left(\omega x^{\frac{1}{h}}\right) + \ldots + E_{k^{-1}}\left(\omega^{h-1}x^{\frac{1}{h}}\right)\right],$$

wo $\omega = e^{\frac{2\pi i}{h}}$. Offenbar ist es erlaubt das Argument $\frac{\varphi}{h}$ für $x^{\frac{1}{h}}$ so zu fixieren, dass die Ungleichungen

$$0 \leqq \frac{\varphi}{h} < \frac{2\pi}{h}$$

ÉTUDE D'UNE FONCTION ENTIÈRE

PAR

J. MALMQUIST

À STOCKHOLM.

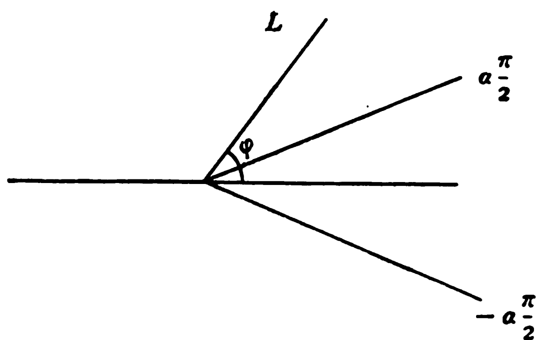
Les recherches de mon Professeur, M. MITTAG-LEFFLER, sur les séries [1]

$$E_a(x) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{x^\nu}{\Gamma(1 + a\nu)}$$

ont montré l'existence d'une fonction entière $E_a(x)$ ayant la propriété suivante rélative à la croissance de la fonction le long de vecteurs issus de l'origine. Si φ est un nombre réel satisfaisant à la condition

$$a\frac{\pi}{2} < \varphi < 2\pi - a\frac{\pi}{2}\ .$$

$E_a(x)$ tendra vers zéro, si nous ferons croître x le long du vecteur L faisant l'angle φ avec l'axe réel est positif.



[1] Acta mathematica, t. 29.

Acta mathematica. 29. Imprimé le 6 février 1905.

Ce résultat fait probable l'existence d'une fonction entière ne devenant infinie que le long d'un seul vecteur issu de l'origine, et il est naturel de la chercher parmi les fonctions

$$\sum_\nu \frac{x^\nu}{\Gamma(1 + \nu a_\nu)}$$

où a_ν est une fonction de ν tendant vers zero avec $\frac{1}{\nu}$,

Nous prendrons

$$a_\nu = \frac{1}{(\log \nu)^\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

et nous allons démontrer que *la fonction entière*

$$G(x) = \sum_2^\infty {}_\nu \frac{x^{\nu-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{(\log \nu)^\alpha}\right)}$$

tend vers zéro, si x tend vers l'infini le long d'un vecteur issu de l'origine ne coïncidant pas avec l'axe réel et positif.

D'abord, il est évident que $G(x)$ représente une fonction entière, car, la fonction $\Gamma(1 + n)$ croissant approximativement comme n^n, nous avons

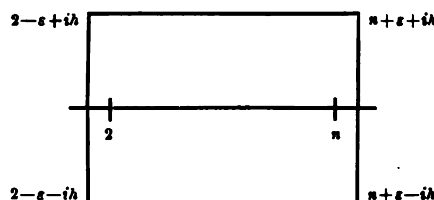
$$\lim_{\nu=\infty} \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{(\log \nu)^\alpha}\right) \right\}^{\frac{1}{\nu}} = \lim_{\nu=\infty} e^{\frac{1}{(\log \nu)^\alpha} \log \frac{\nu}{(\log \nu)^\alpha}} = \infty.$$

Pour démontrer la propriété énoncée de $G(x)$ concernant la croissance, considérons avec M. Mittag-Leffler l'intégrale [1]

$$\int_R \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{x^{z-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{z}{(\log z)^\alpha}\right)} dz$$

pris suivant un rectangle R ayant comme sommets les points

$$2 - \varepsilon - ih\,,\ 2 - \varepsilon + ih\,,\ n + \varepsilon + ih\,,\ n + \varepsilon - ih.$$



[1] loc. cit.

Nous choisirons la détermination de $(\log z)^a$ que l'on obtiendra de la valeur réelle pour une valeur réelle de z par extension analytique le long d'un chemin situé dans R. Alors on trouvera facilement la valeur

$$\sum_{2}^{n} {}_{\nu} \frac{x^{\nu-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{(\log \nu)^a}\right)}$$

de l'intégrale considerée, car les seules singularités de la fonction sous le signe $\int$ situées dans R sont

$$2, 3, \ldots, n$$

et les résidus correspondants

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{2}{(\log 2)^a}\right)}, \quad \frac{1}{2\pi i} \frac{x}{\Gamma\left(1 + \frac{3}{(\log 3)^a}\right)}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2\pi i} \frac{x^{n-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{(\log n)^a}\right)}.$$

Ensuite, en posant

$$z = \tau + it$$

nous aurons

$$\frac{z}{(\log z)^a} = \frac{\tau + it}{\left(\log \sqrt{\tau^2 + t^2} + i \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\tau}\right)^a} = \frac{\tau + it}{\rho^a (\cos a\theta + i \sin a\theta)} = R(\tau, t) + iI(\tau, t)$$

avec

$$\rho = \sqrt{(\log \sqrt{\tau^2 + t^2})^2 + \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\tau}\right)^2},$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\tau}}{\log \sqrt{\tau^2 + t^2}},$$

$$R(\tau, t) = \frac{1}{\rho^a} (\tau \cos a\theta + t \sin a\theta),$$

$$I(\tau, t) = \frac{1}{\rho^a} (-\tau \sin a\theta + t \cos a\theta)$$

les arc tg demeurant entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Pour avoir une expression de la fonction $G(x)$, nous ferons croître R c'est-à-dire h et n d'une manière convenable déterminée de la façon suivante. Écrivons l'égalité évidente

$$\int_R = \int_{2-\varepsilon-ih}^{n+\varepsilon-ih} + \int_{n+\varepsilon-ih}^{n+\varepsilon+ih} + \int_{n+\varepsilon+ih}^{2-\varepsilon+ih} + \int_{2-\varepsilon+ih}^{2-\varepsilon-ih}$$

et cherchons à faire croître h et n de manière que les trois premières intégrales rectilignes tendent vers zéro.

Étudions d'abord l'intégrale

$$I_1 = \int_{n+\varepsilon-ih}^{n+\varepsilon+ih} \frac{1}{e^{2\pi i z}-1} \frac{x^{z-2}}{\Gamma\left(1+\frac{z}{(\log z)^\alpha}\right)} dz$$

qui est égale à

$$i\int_{-h}^{+h} \frac{1}{e^{2\pi i \varepsilon - 2\pi t}-1} \frac{x^{n+\varepsilon-2}x^{it}}{\Gamma(1+R(n+\varepsilon,t)+iI(n+\varepsilon,t))} dt.$$

Nous aurons une valeur approchée de cette intégrale en observant que l'inégalité

$$R(\tau, t) > 0$$

a lieu pour toutes les valeurs de τ, t en question; car t et θ ont mêmes signes, si $\tau > 0$. Alors l'inégalité

$$\left|\frac{1}{\Gamma(1+R(n+\varepsilon,t)+iI(n+\varepsilon,t))}\right|$$

$$\leqq \frac{1}{\Gamma(1+R(n+\varepsilon,t))}\sqrt{\frac{e^{\pi I(n+\varepsilon,t)}-e^{-\pi I(n+\varepsilon,t)}}{2\pi I(n+\varepsilon,t)}}$$

est vraie pour toutes les valeurs de t entre $-h$ et $+h$, car nous avons[1]

---

[1] loc. cit.

$$\frac{1}{\Gamma(1+\tau+it)\Gamma(1+\tau-it)}$$

$$= e^{C(\tau+it)}\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{\tau+it}{\nu}\right)e^{-\frac{\tau+it}{\nu}}\,e^{C(\tau-it)}\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{\tau-it}{\nu}\right)e^{-\frac{\tau-it}{\nu}}$$

$$= e^{2C\tau}\left\{\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{\tau}{\nu}\right)e^{-\frac{\tau}{\nu}}\right\}^2\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{t^2}{(\tau+\nu)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\Gamma(1+\tau)}\right)^2\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{t^2}{\nu^2}\right)\frac{\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{t^2}{(\tau+\nu)^2}\right)}{\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{t^2}{\nu^2}\right)}$$

$$= \left(\frac{1}{\Gamma(1+\tau)}\right)^2\frac{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}{2\pi t}\,\frac{\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{t^2}{(\tau+\nu)^2}\right)}{\prod_1^\infty{}_\nu\left(1+\frac{t^2}{\nu^2}\right)}.$$

En posant

$$x = re^{i\varphi}$$

nous concluons de là que la valeur absolue de I_1 est au plus égale à

$$M_1 = \operatorname*{Max}_{t=-h+\dots+h}\left\{\frac{2h}{\left|e^{2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1\right|}\,\frac{r^{n+\varepsilon-2}\,e^{-\varphi t}}{\Gamma(1+R(n+\varepsilon\,,t))}\sqrt{\frac{e^{\pi I(n+\varepsilon,t)}-e^{-\pi I(n+\varepsilon,t)}}{2\pi I(n+\varepsilon\,,t)}}\right\}.$$

Supposons que le maximum a lieu pour $t=t_n$. Faisons ensuite croître h et n d'une manière convenable. Nous allons voir qu'il est suffisant de poser

$$h=\frac{n}{(\log n)^\beta},\qquad 0<\beta<1.$$

En effet, observons d'abord que l'on a

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{t_n}{n}=0$$

d'où

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\theta(n+\varepsilon\,,t_n)=0,$$

$$\rho(n+\varepsilon\,,t_n)=\log n(1+\varepsilon_n)$$

où

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0;$$

(Dans la suite nous entendrons toujours par ε_n une quantité qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$)

par suite

$$R(n + \varepsilon, t_n) = \frac{n}{(\log n)^\alpha}(1 + \varepsilon_n)$$

et

$$\Gamma(1 + R(n + \varepsilon, t_n)) = e^{n(\log n)^{1-\alpha}(1+\varepsilon_n)}$$

car

$$\Gamma(1 + n) = e^{n \log n (1+\varepsilon_n)};$$

de l'égalité

$$2\frac{n}{(\log n)^\beta} r^{n+\varepsilon-2} = e^{n \log r (1+\varepsilon_n)}$$

et du fait que r est constant nous concluons enfin

$$\frac{2\frac{n}{(\log n)^\beta} r^{r+\varepsilon-2}}{\Gamma(1 + R(n + \varepsilon, t_n))} = e^{-n(\log n)^{1-\alpha}(1+\varepsilon_n)}.$$

Pour avoir maintenant la valeur limite de M_1 quand n croît indéfiniment, il nous faut distinguer trois cas différents. Il pourrait arriver que pour certaines valeurs n' de n indéfiniment croissantes

$$\lim_{n'=\infty} \frac{t_{n'}}{n' \sin \alpha\theta(n' + \varepsilon, t_{n'})} = \infty.$$

Alors, le deuxième terme de l'expression de $I(n' + \varepsilon, t_{n'})$ en déterminera la croissance, d'où

$$I(n' + \varepsilon, t_{n'}) = \frac{t_{n'}}{(\log n')^\alpha}(1 + \varepsilon_{n'}) = \frac{n'}{(\log n')^\alpha}\varepsilon_{n'}$$

car

$$t_{n'} = \varepsilon_{n'} n'.$$

Dans le deuxième cas nous aurons

$$\lim_{n''=\infty} \frac{t_{n''}}{n'' \sin \alpha\theta(n'' + \varepsilon, t_{n''})} = 0;$$

alors le premier terme de $I(n'' + \varepsilon, t_{n''})$ déterminera la croissance, d'où nous concluons

$$I(n'' + \varepsilon, t_{n''}) = \frac{n''}{(\log n'')^\alpha} \varepsilon_{n''}$$

comme précedemment, car $\sin \alpha\theta$ tend vers zéro.

Enfin nous aurons à considérer les valeurs n''' de n indéfiniment croissantes et telles que

$$\lim_{n'''=\infty} \frac{t_{n'''}}{n''' \sin \alpha\theta(n''' + \varepsilon, t_{n'''})} = k \qquad (k \text{ positif fini}).$$

Alors, nous pouvons employer ou bien le premier ou bien le deuxième raisonnement, mais comme ils conduisent tous les deux au même résultat, il est démontré, que l'on a pour toutes les valeurs de n indéfiniment croissantes

$$I(n + \varepsilon, t_n) = \frac{n}{(\log n)^\alpha} \varepsilon_n .$$

De là nous concluons

$$\sqrt{\frac{e^{\pi I(n+\varepsilon, t_n)} - e^{-\pi I(n+\varepsilon, t_n)}}{2\pi I(n + \varepsilon, t_n)}} = e^{\frac{n}{(\log n)^\alpha} \varepsilon_n}$$

par suite

$$\lim_{n=\infty} \frac{2 \frac{n}{(\log n)^\beta} r^{n+\varepsilon-2}}{\Gamma(1 + R(n + \varepsilon, t_n))} \sqrt{\frac{e^{\pi I(n+\varepsilon, t_n)} - e^{-\pi I(n+\varepsilon, t_n)}}{2\pi I(n + \varepsilon, t_n)}} = 0.$$

Il reste à étudier

$$\frac{e^{-\varphi t_n}}{|e^{2\pi i\varepsilon - 2\pi t_n} - 1|};$$

pour des valeurs de n indéfiniment croissantes telles que t_n reste plus petit qu'un nombre fixe, cette expression restera aussi plus petite qu'un certain nombre fixe, pour des valeurs de n telles que

$$\lim_{n=\infty} t_n = +\infty$$

elle tendra vers zéro, si l'on a

$$\varphi > 0,$$

enfin, pour des valeurs de n telles que

$$\lim_{n=\infty} t_n = -\infty$$

elle tendra vers zéro, si

$$\varphi < 2\pi.$$

Par conséquent, h et n croissant de la manière indiquée, l'intégrale I_1 tendra vers zéro, si φ satisfait à la seule condition

$$0 < \varphi < 2\pi.$$

Passons maintenant à l'étude de l'intégrale

$$I_2 = \int_{2-\varepsilon+ih}^{n+\varepsilon+ih} \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \frac{x^{z-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{z}{(\log z)^\alpha}\right)} dz;$$

il est égale à

$$\int_{2-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \frac{1}{e^{2\pi i\tau - 2\pi h} - 1} \frac{x^{\tau-2} x^{ih}}{\Gamma(1 + R(\tau, h) + iI(\tau, h))} d\tau.$$

Sa valeur absolue est donc au plus égale à

$$M_2 = \max_{\tau=2-\varepsilon\ldots n+\varepsilon} \left\{ \frac{1}{|e^{2\pi i\tau - 2\pi h} - 1|} \int_{2-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \frac{r^{\tau-2}}{\Gamma(1 + R(\tau, h))} d\tau . e^{-\varphi h} \sqrt{\frac{e^{\pi I(\tau, h)} - e^{-\pi I(\tau, h)}}{2\pi I(\tau, h)}} \right\}.$$

L'intégrale

$$\int_{2-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \frac{r^{\tau-2}}{\Gamma(1 + R(\tau, h))} d\tau$$

qui se présente ici, tend vers zéro, h et n croissant de la façon supposée. En effet, en désignant par $\tau_{h,n}$ une valeur entre h et n, nous aurons

$$R(\tau_{h,n}, h) = \frac{\tau_{h,n}(1 + \varepsilon_n)}{(\log \tau_{h,n})^\alpha} \geqq k \frac{h}{(\log n)^\alpha} = k \frac{n}{(\log n)^{\alpha+\beta}} \qquad (k \text{ fixe})$$

le premier terme de $R(\tau_{h,n}, h)$ déterminant la croissance, car θ tend vers zéro. Donc

$$\int_{2-\varepsilon}^{n+\varepsilon} = \int_{h}^{n+\varepsilon} + \int_{2-\varepsilon}^{h} \leqq k' \frac{nr^n}{\Gamma(1+R(\tau_{h,n}, h))} + \operatorname*{Max}_{\tau=2-\varepsilon\ldots h} \frac{hr^{\tau-2}}{\Gamma(1+R(\tau, h))} \quad (k' \text{ fixe})$$

$$\leqq k'' \frac{nr^n}{e^{n(\log n)^{1-\alpha-\beta}(1+\varepsilon_n)}} + M \quad (k'' \text{ fixe})$$

$$= \varepsilon_n + M,$$

si $\alpha + \beta < 1$, ce que nous supposons.

Soit τ_h la valeur de τ pour laquelle le maximum M aura lieu. Pour évaluer la limite de M il est suffisant de considérer deux cas. En premier lieu, pour les valeurs h' de h telles que

$$\lim_{h'=\infty} \frac{\tau_{h'}}{h' \sin \alpha\theta(\tau_{h'}, h')} = 0$$

nous aurons

$$\theta(\tau_{h'}, h') = \frac{\pi}{2} \frac{1+\varepsilon_{h'}}{\log h'}$$

$$\tau_{h'} = \frac{h'}{\log h'} \varepsilon_{h'};$$

en effet

$$\tau_{h'} = h' \varepsilon_{h'},$$

d'où

$$\theta(\tau_{h'}, h') = \frac{\pi}{2} \frac{1+\varepsilon_{h'}}{\log \sqrt{\tau_{h'}^2 + h'^2}} = \frac{\pi}{2} \frac{1+\varepsilon_{h'}}{\log h'};$$

ensuite, la condition imposée à h' donne la valeur assignée de $\tau_{h'}$.

La valeur trouvée de $\theta(\tau_{h'}, h')$ montre que le seconde terme de l'expression de $R(\tau_{h'}, h')$ détermine la croissance de cette fonction. Comme d'ailleurs

$$\rho(\tau_{h'}, h') = \log h'(1+\varepsilon_{h'})$$

nous trouverons donc

$$R(\tau_{h'}, h') = \alpha \frac{\pi}{2} \frac{h'(1+\varepsilon_{h'})}{(\log h')^{1+\alpha}},$$

d'où enfin

$$\frac{h'r^{\tau_{h'}-2}}{\Gamma(1+R(\tau_{h'},h'))}=\frac{h'r^{\tau_{h'}}}{e^{\alpha\frac{\pi}{2}\frac{h'}{(\log h')^{\alpha}}(1+\varepsilon_{h'})}}=e^{-\alpha\frac{\pi}{2}\frac{h'}{(\log h')^{\alpha}}(1+\varepsilon_{h'})}.$$

Examinons maintenant le cas où h'' satisfait à la condition

$$\lim_{h''=\infty}\frac{\tau_{h''}}{h''\sin\alpha\theta(\tau_{h''},h'')}\neq 0.$$

Alors

$$\tau_{h''}=K(h'')\frac{h''}{\log h''}$$

où

$$\lim_{h''=\infty}K(h'')>0,$$

car l'inégalité

$$\tau_h\leqq h$$

entraine

$$\theta(\tau_h,h)=\frac{\overline{K}(h)}{\log h}\quad\text{avec}\quad 0<\overline{K}(h)<k\qquad(k\ \text{fixe})$$

pour toutes les valeurs de h suffisamment grandes.

Il suit de là que

$$\tau_{h''}\cos\alpha\theta(\tau_{h''},h'')+h''\sin\alpha\theta(\tau_{h''},h'')$$
$$=K_2(h'')\frac{h''}{\log h''}+\overline{K}_1(h'')\frac{h''}{\log h''}=K_3(h'')\frac{h''}{\log h''},$$

K_2 et K_3 satisfaisant à la même condition que K, $\overline{K}_1$ ayant la même propriété que $\overline{K}$.

Comme d'ailleurs

$$\rho(\tau_{h''},h'')=\log h''(1+\varepsilon_{h''})$$

nous trouverons

$$R(\tau_{h''},h'')=K_3(h'')\frac{h''}{(\log h'')^{1+\alpha}}(1+\varepsilon_{h''})$$

et enfin

$$\frac{h'' r^{\tau_{h''}-2}}{\Gamma(1 + R(\tau_{h''}, h''))} = \frac{e^{\log r K(h'') \frac{h''}{\log h''}(1+\varepsilon_{h''})}}{e^{K_3(h'') \frac{h''}{(\log h'')^{\alpha}}(1+\varepsilon_{h''})}} = \varepsilon_{h''}$$

car nous avons

$$K_3 = \overline{K}_1 + K_2 = \overline{K}_1 + K(1 + \varepsilon_{h''}) > K.$$

Il résulte de ces considérations que l'intégrale

$$\int_{2-\varepsilon}^{h} \frac{r^{\tau-2}}{\Gamma(1 + R(\tau, h))} d\tau$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{h}$; donc

$$\lim_{n=\infty} \int_{2-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \frac{r^{\tau-2}}{\Gamma\left(1 + R\left(\tau, \frac{n}{(\log n)^{\beta}}\right)\right)} d\tau = 0.$$

Ensuite, observons que dans l'expression M_2

$$I(\tau, h) = h\varepsilon_h,$$

car nous avons

$$0 \leqq \tau \sin \alpha\theta < (n + 1)\theta < k\frac{n}{\log h} < k'\frac{n}{\log n} = h\varepsilon_h \qquad (k, k' \text{ fixe})$$

pour les grandes valeurs de n, d'où

$$-\tau \sin \alpha\theta + h \cos \alpha\theta = k'' h(1 + \varepsilon_h) \qquad (k'' \text{ fixe}).$$

Par suite, nous aurons

$$\lim_{h=\infty} \frac{e^{-\varphi h}}{e^{2\pi i\tau - 2\pi h} - 1} \sqrt{\frac{e^{\pi I(\tau, h)} - e^{-\pi I(\tau, h)}}{2\pi I(\tau, h)}} = 0$$

si

$$\varphi > 0$$

d'où l'on conclut que l'intégrale I_2 tend vers zéro, h et n croissant de la façon supposée.

De même, nous pouvons démontrer que sous la condition

$$\varphi < 2\pi$$

cette propriété appartient aussi à la troisième intégrale I_3 que l'on obtient de I_2 en changeant h en $-h$; car nous avons

$$R(\tau, -h) = R(\tau, h)$$

et

$$I(\tau, -h) = h\varepsilon_h$$

comme précédemment.

Nous arrivons ainsi au résultat que, sous la seule condition

$$0 < \varphi < 2\pi$$

les intégrales I_1, I_2, I_3 tendront vers zéro, le rectangle R se grandissant d'une manière convenable. De là nous concluons que *l'égalité*

$$G(x) = \lim_{h=\infty} \int_{2-\varepsilon+ih}^{2-\varepsilon-ih} \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \frac{x^{z-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{z}{(\log z)^{\alpha}}\right)} dz$$

$$= \lim_{h=\infty} i \int_{+h}^{-h} \frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon - 2\pi t} - 1} \frac{x^{-\varepsilon+it}}{\Gamma\left(1 + \frac{2-\varepsilon+it}{(\log(2-\varepsilon+it))^{\alpha}}\right)} dt$$

a lieu sous cette même condition.

Par suite, nous aurons

$$|G(x)|$$

$$\leqq \lim_{h=\infty} \left[\int_{-h}^{+h} \frac{1}{|e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t} - 1|} \frac{r^{-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{\Gamma(1 + R(2-\varepsilon, t))} \sqrt{\frac{e^{\pi I(2-\varepsilon, t)} - e^{-\pi I(2-\varepsilon, t)}}{2\pi I(2-\varepsilon, t)}} dt + \varepsilon_h \right]$$

$$= r^{-\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t} - 1|} \frac{e^{-\varphi t}}{\Gamma(1 + R(2-\varepsilon, t))} \sqrt{\frac{e^{\pi I(2-\varepsilon, t)} - e^{-\pi I(2-\varepsilon, t)}}{2\pi I(2-\varepsilon, t)}} dt$$

l'intégrale dans le dernier membre étant convergent, car nous avons

$$R(2-\varepsilon\,,\,t) = \alpha\frac{\pi}{2}\frac{|t|}{(\log|t|)^{1+\alpha}}(1+\varepsilon_t),$$

$$I(2-\varepsilon\,,\,t) = \frac{t}{(\log|t|)_\alpha}(1+\varepsilon_t)$$

d'où

$$\frac{1}{\Gamma(1+R(2-\varepsilon\,,\,t))}\sqrt{\frac{e^{\pi I(2-\varepsilon,t)}-e^{-\pi I(2-\varepsilon,t)}}{2\pi I(2-\varepsilon\,,\,t)}}$$

$$= e^{-\alpha\frac{\pi}{2}\frac{|t|}{(\log|t|)^\alpha}(1+\varepsilon)+\frac{\pi}{2}\frac{t}{(\log|t|)^\alpha}(1+\varepsilon_t)} = e^{t\varepsilon_t}$$

comme dans le second cas traité plus haut. Par suite, nous pouvons écrire

$$|G(x)| < r^{-\varepsilon}M(\varphi) \quad \text{si} \quad 0<\varphi<2\pi,$$

et alors, $M(\varphi)$ a la propriété d'être plus petit qu'un nombre fixe pour toutes les valeurs de φ satisfaisant à la condition

$$\varepsilon_1 < \varphi < 2\pi - \varepsilon_1,$$

ε_1 étant une certaine quantité positive. Il suit de là que $G(x)$ *tend uniformément vers zéro quand* x *s'éloigne à l'infini dans un angle déterminé par l'inégalité*

$$\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon$$

ε *étant un nombre positif arbitrairement petit.*

Au contraire, quand x s'éloigne à l'infini le long de l'axe réel et positif, $G(x)$ croit au delà de toute limite comme le montre la forme de la série représentant $G(x)$. Par une méthode directe on pourrait obtenir une valeur approchée de $G(x)$, mais cela est sans interêt en vertu d'un beau théorème de M. PHRAGMÉN[1] qui contient comme cas particulier le résultat qu'aucune fonction entière ayant la même propriété que $G(x)$ rélative à la croissance le long de vecteurs ne coinsidant pas avec l'axe réel et positif ne peut être de genre fini.

---

[1] Acta mathematica, t. 29. Théorème I.

ÜBER DIE NULLSTELLEN DER FUNKTIONEN $E_a(x)$

VON

A. WIMAN
in UPSALA.

§ 1.

Für nähere Angaben über Lage und Dichtigkeit der Nullstellen einer in der Gestalt einer Potenzreihe gegebenen ganzen Funktion sind zwar im Allgemeinen höchst komplizierte Betrachtungen erforderlich. Doch lassen sich derartige Fragen für die ganzen Funktionen

$$(1) \qquad E_a(x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{\Gamma(an + 1)}$$

in ganz einfacher Weise erledigen. Diesen Umstand verdankt man den für die Untersuchungen äusserst bequemen Darstellungen dieser Funktionen, welche von Herrn MITTAG-LEFFLER gegeben sind.

Die fundamentale Identität ist hierbei die folgende

$$(2) \qquad E_a(x) = \frac{1}{2\pi i a}\int \frac{e^{\omega^{\frac{1}{a}}}d\omega}{\omega - x}.$$

Die Integration wird über einen Kurvenzug ausgeführt, dessen Anfangspunkt und Endpunkt unendlich entfernt liegen, und zwar, falls a eine positive reelle Grösse bezeichnet, bez. in den Richtungen $\varphi = \mp a\pi$; überdies soll die Stelle x bei der Integration auf der linken Seite gelassen werden. Hält man letztere Bedingung nicht aufrecht, so sind nur die nötigen Residuen hinzuzufügen. Als Integrationskurve kann man also auch die beiden Geraden $\varphi = \mp a\pi$ in ihrer ganzen Länge nehmen; nur ist

eine kleine Ausbiegung vorzunehmen, falls die Stelle x eben auf einer von diesen Geraden liegen sollte. Nach einer solchen Wahl bekommt man für $x = re^{\varphi i}$

$$(3) \qquad E_a(x) = \frac{1}{a}\sum_x e^{r^{\frac{1}{a}} e^{\frac{\varphi+2x\pi}{a} i}} + \frac{1}{2\pi i a}\int \frac{e^{\omega^{\frac{1}{a}}} d\omega}{\omega - x},$$

wo x die positiven und negativen ganzen Zahlen (inclusive Null) durchläuft, für welche die Bedingung

$$(4) \qquad -a\pi < \varphi + 2x\pi < a\pi$$

erfüllt ist.[1]

Das in (3) auftretende Integral lässt eine Entwickelung in eine halbkonvergente Reihe zu. Schreiben wir nämlich

$$\frac{1}{\omega - x} = -\left[\frac{1}{x} + \frac{\omega}{x^2} + \ldots + \frac{\omega^{n-1}}{x^n}\right] + \frac{\omega^n}{(\omega - x)},$$

so ergiebt sich

$$(5) \quad E_a(x) = \frac{1}{a}\sum_x e^{r^{\frac{1}{a}} e^{\frac{\varphi+2x\pi}{a} i}} - \sum_1^n \frac{x^{-\nu}}{\Gamma(-a\nu + 1)} + \frac{1}{2\pi i a x^n}\int \frac{\omega^n e^{\omega^{\frac{1}{a}}} d\omega}{\omega - x}.$$

Ohne grosse Schwierigkeit findet man, dass bei geeigneter Wahl von n das Restglied höchstens von der Grössenordnung $e^{-|x|^{\frac{1}{a}}}$ wird.

Der zwischen den Geraden $\varphi = \mp a\pi$ enthaltene Teil von der ω-Ebene ist hier als eine durch die Relation

$$(6) \qquad t^a = \omega$$

vermittelte Abbildung der t-Ebene aufzufassen, so dass den beiden Ufern der negativen reellen Halbaxe der letzteren Ebene die Geraden $\varphi = \mp a\pi$ entsprechen.

---

[1] c. f. G. Mittag-Leffler. *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène.* Cinquième note, § 3. Ce tome pag. 132—147.

In ähnlicher Weise gestaltet sich die Sache, falls α eine komplexe Zahl $\beta + i\gamma$ bedeutet;[1] es muss $\beta > 0$ sein, damit $E_\alpha(x)$ eine ganze Funktion bezeichne. Doch tritt hier der Unterschied ein, dass für $t = \rho e^{i\tau}$ die Geraden $\tau = \tau_1$ und die Kreise $\rho = \rho_1$ durch (6) in logaritmische Spiralen transformiert werden. Schreiben wir nämlich $\omega = Re^{i\psi}$, so erhalten wir aus (6) die beiden Relationen

$$(7)\qquad \beta \log \rho - \gamma\tau = \log R; \qquad \gamma \log \rho + \beta\tau = \psi.$$

Den Strahlen $\tau = \tau_1$ entsprechen demnach die Spiralen

$$(8)\qquad \psi = \frac{\gamma}{\beta} \log R + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} \tau_1 = \psi_0 + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} \tau_1,$$

wenn $\psi = \psi_0$ die der positiven Halbaxe zugeordnete Spirale bezeichnet. Setzt man jetzt

$$(9)\qquad \psi = \psi_0 + \varphi,$$

so werden die den Strahlen der t-Ebene entsprechenden Spiralen durch die Gleichungen

$$(10)\qquad \varphi = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} \tau_1 \qquad (-\pi \leqq \tau_1 \leqq \pi)$$

definiert, und die t-Ebene wird auf den durch die Spiralen

$$(11)\qquad \varphi = \mp \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} \pi$$

begrenzten Teil der ω-Ebene abgebildet.

Andererseits entspricht einem Kreise $\rho = \rho_1$ der durch die Spiralen (11) abgegrenzte Teil der Spirale

$$(12)\qquad \log R = -\frac{\gamma}{\beta}\psi + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} \log \rho_1 = -\frac{\beta\gamma}{\beta^2 + \gamma^2} \varphi + \beta \log \rho_1.$$

Man bekommt also für je zwei Stellen auf den Spiralen (11), welche demselben Punkte auf der negativen Halbaxe der t-Ebene entsprechen, verschiedene R-Werte, nämlich bez.

$$(13)\qquad R = e^{\pm\gamma\pi} \rho_1^\beta.$$

[1] c. f. G. Mittag-Leffler. *Sopra la funzione $E_\alpha(x)$*. R. Accad. dei Lincei, Atti. Ser. 5. Vol. 13, 3 Gennaio 1904, pag. 3—5.

Für

$$x = re^{i\psi}; \qquad \psi = \frac{\gamma}{\beta}\log r + \varphi$$

findet man

$$e^{x^{\frac{1}{\alpha}}} = e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{(\varphi+2\varkappa\pi)i}{\alpha}}}. \qquad (\varkappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Der Funktion $E_\alpha(x)$ können wir jetzt die folgende Darstellung geben

$$(5') \qquad E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\sum_\varkappa e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{(\varphi+2\varkappa\pi)i}{\alpha}}} - \sum_1^n \frac{x^{-\nu}}{\Gamma(-\alpha\nu+1)} + \frac{1}{2\pi i\alpha x^n}\int \frac{\omega^n e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega}{\omega - x},$$

wo die Summation über die den Ungleichungen

$$(4') \qquad -\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta}\pi < \varphi + 2\varkappa\pi < \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta}\pi$$

genügenden ganzen Zahlen erstreckt wird, und für die Integration die Spiralen (11) dieselbe Rolle spielen wie in dem früher betrachteten speciellen Falle die Geraden $\varphi = \mp \alpha\pi$.

§ 2.

Sei zunächst α *eine reelle Grösse* $\geqq 2$. Es ist dann ersichtlich, dass, falls man vom Anfangspunkte in einer bestimmten anderen Richtung als $\varphi = \pi$ fortschreitet, in der Entwicklung (5) das Glied

$$\frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}}} \qquad (-\pi < \varphi < \pi)$$

dem absoluten Betrage nach grösser als die Summe der absoluten Beträge der übrigen Glieder wird, wenn $|x|$ einen gewissen Wert übersteigt; in einer solchen Richtung können also Nullstellen höchstens für begrenzte Werte von $|x|$ liegen. Daraus folgt zwar noch nicht, dass die Nullstellen eben auf der negativen Halbaxe liegen sollen. Doch kann man für grosse Werte der Moduln einen Beweis hierfür in sehr einfacher Weise erbringen.

Für $\varphi = \pi$ besitzt die Entwicklung (5) zwei Hauptglieder. Betrachten wir deren Summe

$$(14)\qquad \frac{1}{a}\left[e^{r^{\frac{1}{a}}e^{\frac{\pi i}{a}}} + e^{r^{\frac{1}{a}}e^{-\frac{\pi i}{a}}}\right] = \frac{2}{a}e^{r^{\frac{1}{a}}\cos\frac{\pi}{a}}\cos\left(r^{\frac{1}{a}}\sin\frac{\pi}{a}\right),$$

so finden wir, dass diese Glieder einander verstärken für

$$(15)\qquad r^{\frac{1}{a}}\sin\frac{\pi}{a} = k\pi, \qquad (k=1,2,\ldots)$$

aber einander aufheben für

$$(16)\qquad r^{\frac{1}{a}}\sin\frac{\pi}{a} = \left(k - \frac{1}{a}\right)\pi.$$

Die Sache gestaltet sich doch für die durch (15) bestimmten r-Werte insofern verschieden, als der Ausdruck (14) positiv oder negativ ist, je nachdem k eine gerade oder ungerade ganze Zahl darstellt. Dies trifft auch für die Funktion $E_a(x)$ zu, da ja für die fraglichen r-Werte das betreffende Glied von höherer Grössenordnung als der Rest ist. Zwischen je zwei derartigen r-Werten muss demnach $E_a(x)$ (jedenfalls für genügend grosse Zahlen k) eine Nullstelle besitzen, und zwar in der Nähe der zwischenliegende Stelle (16). *Für die Anzahl der negativen Wurzeln, deren Moduln* $< r$ *sind, haben wir mithin den Ausdruck*

$$(17)\qquad \frac{r^{\frac{1}{a}}\sin\frac{\pi}{a}}{\pi}$$

erhalten.

Dass die Funktion $E_a(x)$ höchstens eine begrenzte Anzahl von imaginären Nullstellen besitzen kann, folgt jetzt daraus, dass (17) *die genaue Anzahl der Nullstellen angiebt, wenn r durch eine Identität* (15) *bestimmt wird,* und k genügend gross ist. Um dies zu beweisen, berechnen wir das Integral

$$(18)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int d\log E_a(x),$$

wenn die Integration in der positiven Richtung über den Kreis $|x| = r$ erstreckt wird. Nach der Zerlegung von $E_a(x)$ in zwei Faktoren:

$$(19)\qquad E_a(x) = e^{r^{\frac{1}{a}}e^{\frac{\varphi i}{a}}}(1 + u) \qquad (-\pi \leqq \varphi \leqq \pi)$$

bekommen wir

$$(20) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d\log E_a(x) = \frac{1}{2\pi i}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} r^{\frac{1}{a}} e^{\frac{\varphi i}{a}} + \frac{1}{2\pi i}\int d\log(1+u).$$

Es ist aber bei Bezugnahme auf die Identität (15)

$$(21) \qquad \frac{1}{2\pi i}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} r^{\frac{1}{a}} e^{\frac{\varphi i}{a}} = \frac{r^{\frac{1}{a}}\sin\frac{\pi}{a}}{\pi} = k.$$

Anderseits hat man

$$(22) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d\log(1+u) = 0$$

Um die Richtigkeit von (22) einzusehen, bemerken wir zunächst, dass auf Grund der speciellen Wahl von r der Ausdruck $e^{r^{\frac{1}{a}} e^{\frac{\varphi i}{a}}}$ (und folglich auch u) für $\varphi = -\pi$ und $\varphi = \pi$ einen und denselben Wert besitzt. Können wir jetzt noch nachweisen, dass bei dem ganzen Umlaufe von $\varphi = -\pi$ bis $\varphi = \pi$ $1 + u$ ein positives Glied enthält, welches grösser ist als der absolute Betrag des Restes, so folgt hieraus, dass man mit dem ursprünglichen Argumente für $1 + u$ zurückkommt. Es ist aber eben dies, was in (22) ausgesprochen wird.

Den fraglichen Nachweis können wir in der folgenden Weise erbringen. Ausser in der Nähe der negativen Halbaxe ist offenbar schon $1 > |u|$. Für $\varphi = -\pi + \partial$ oder $\varphi = \pi - \partial$ braucht dies zwar nicht der Fall zu sein, falls ∂ genügend klein ist. In diesem Falle ist aber das in u enthaltene Hauptglied eine positive Grösse. Betrachten wir z. B. den Fall $\varphi = -\pi + \partial$, so finden wir als einziges Glied in u, dessen Betrag mit 1 vergleichbar sein kann,

$$(23) \qquad e^{r^{\frac{1}{a}} e^{\frac{\pi+\partial}{a} i} - r^{\frac{1}{a}} e^{-\frac{(\pi-\partial) i}{a}}} = e^{-2 r^{\frac{1}{a}} \sin\frac{\pi}{a}\left(\sin\frac{\partial}{a} - i\cos\frac{\partial}{a}\right)}$$

$$= e^{-2k\pi\sin\frac{\partial}{a}}\left(\cos\left(2k\pi\cos\frac{\partial}{a}\right) + i\left(2k\pi\cos\frac{\partial}{a}\right)\right).$$

Schreiben wir

$$2k\pi\cos\frac{\partial}{a} = 2k\pi - v,$$

so ergiebt sich zunächst

$$2k\pi \sin\frac{\delta}{\alpha} = 2\sqrt{k\pi v}\sqrt{1-\frac{v}{4k\pi}},$$

und es nimmt jetzt der Ausdruck (23) die Gestalt

$$(24) \qquad e^{-\sqrt{4k\pi v - v^2}}(\cos v - i \sin v)$$

an. Der zugehörige absolute Betrag nimmt also mit wachsendem v sehr rasch ab, und bei niedrigeren Werten von v ist, wie wir behauptet haben, das in (24) und also auch in u enthaltene Hauptglied eine positive Grösse. In ähnlicher Weise erledigt man den Fall $\varphi = \pi - \delta$.

Da es nicht ohne weiteres ersichtlich ist, dass die obigen Auseinandersetzungen für niedrigere Werte von k anwendbar sind, so ist die Unmöglichkeit einer *endlichen* Anzahl von imaginären Nullstellen noch nicht erwiesen. In dem speciellen Falle $\alpha = 2$ hat man

$$E_a(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x^{\frac{1}{2}}} + e^{-x^{\frac{1}{2}}}\right),$$

und die Nullstellen

$$-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2$$

sind alle negativ. Man kann auch für $\alpha > 2$ allgemein nachweisen, dass die Funktion $E_a(x)$ auf der negativen Halbaxe eben so oft Zeichen wechseln muss, wie erforderlich ist, damit sämmtliche Wurzeln reell sein sollen. Es lässt sich in der Tat mit Benutzung der Entwicklung (5) wirklich darlegen, dass $E_a(x)$ für *jede* durch (15) bestimmte Stelle eine positive oder negative Grösse bedeutet, je nachdem k eine gerade oder ungerade ganze Zahl darstellt.[1] *Für* $\alpha \geqq 2$ *besitzt demnach die Funktion* $E_a(x)$ *keine imaginären Nullstellen.*

[1] Die Entwicklung beginnt nämlich stets mit (einem oder mehreren) Gliedern

$$\frac{2}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{2\varkappa+1}{\alpha}\pi} \cos\left(r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{2\varkappa+1}{\alpha}\pi\right), \qquad \left(r^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{k\pi}{\sin\frac{\pi}{\alpha}},\ \varkappa = 0, 1, \ldots\right)$$

welche dasselbe Zeichen wie $(-1)^k$ besitzen, und deren absoluter Betrag grösser als die Summe der absoluten Beträge der restierenden Glieder ist.

§ 3.

Es sei zweitens $0 < \alpha < 2$. Die bestimmenden Glieder in der Entwicklung (5) sind jetzt[1]

$$\frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}}} \qquad \left(-\frac{\alpha\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

und

$$-\frac{x^{-1}}{\Gamma(-\alpha+1)} \qquad \left(\frac{\alpha\pi}{2} < \varphi < 2\pi - \frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

Ist $|x|$ genügend gross, so muss also der absolute Betrag von

$$\frac{1}{\alpha}\left(e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}}} + \frac{r^{-1} e^{-\varphi i}}{\Gamma(-\alpha)}\right) \tag{25}$$

grösser als die Summe der absoluten Beträge der übrigen Glieder sein, es sei denn, dass die Moduln der beiden in (25) eingehenden Glieder annähernd gleich gross sind. Es ist in der Tat

$$-\frac{x^{-2}}{\Gamma(-2\alpha+1)}$$

das bestimmende Glied unter den Restgliedern, so dass der absolute Betrag des Restes von der Grössenordnung

$$r^{-2}$$

ist. Von höherer Grössenordnung kann also bei einer Nullstelle die Differenz

$$e^{r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha}} - \frac{r^{-1}}{|\Gamma(-\alpha)|} \tag{26}$$

[1] Für $\alpha = 1$ verschwinden die Glieder der halbkonvergenten Reihe

$$\sum \frac{x^{-\nu}}{\Gamma(-\alpha\nu+1)}$$

identisch, und die Funktion $E_1(x)$ reduziert sich auf das einzige Glied e^x. Auf diesen Fall haben demnach die Auseinandersetzungen des Textes keine Anwendung.

der absoluten Beträge der beiden Hauptglieder nicht sein. Die Relation

$$(27)\qquad e^{r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\varphi}{\alpha}} = \frac{r^{-1}}{|\Gamma(-\alpha)|}(1 + ur^{-1})$$

bestimmt mithin bei den Nullstellen eine zwar veränderliche aber *endliche* Grösse u. Aus (27) erhalten wir durch Logaritmierung

$$(28)\qquad -r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\varphi}{\alpha} = \log r + \log|\Gamma(-\alpha)| + u_1 r^{-1},$$

wo u_1 eine andere endlich bleibende Grösse bedeutet.

Aus (28) ersieht man, dass bei wachsendem r die Argumente der Nullstellen auf der oberen bez. unteren Halbebene immer weniger von $\frac{\alpha}{2}\pi$ bez. $-\frac{\alpha}{2}\pi$ abweichen dürfen. Da sich alles symmetrisch in Bezug auf die reelle Axe verhält, so brauchen wir offenbar nur die Verhältnisse auf der oberen Halbebene besonders zu untersuchen. Schreiben wir

$$(29)\qquad \varphi = \frac{\alpha}{2}\pi + \delta,$$

so geht (28) in

$$(30)\qquad r^{\frac{1}{\alpha}}\sin\frac{\delta}{\alpha} = \log r + \log|\Gamma(-\alpha)| + u_1 r^{-1}$$

über. *Mit wachsendem r nähern sich also die Nullstellen unbegrenzt der Kurve*

$$(31)\qquad r^{\frac{1}{\alpha}}\sin\frac{\delta}{\alpha} = \log r + \log|\Gamma(-\alpha)|;$$

man findet ja (von niedrigeren Gliedern abgesehen) als Abstand

$$\alpha u_1 r^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Aus (31) erhält man annäherungsweise

$$(32)\qquad \delta = \alpha r^{-\frac{1}{\alpha}}[\log r + \log|\Gamma(-\alpha)|].$$

Sucht man jetzt den Abstand einer Nullstelle von der Geraden $\varphi = \frac{\alpha}{2}\pi$, so findet man hierfür in erster Annäherung

$$(33)\qquad r\delta = \alpha r^{1-\frac{1}{\alpha}}(\log r + \log|\Gamma(-\alpha)|).$$

Dieser Ausdruck gestattet unmittelbar Folgendes zu erschliessen:

Hat man $\alpha < 1$, so nähern sich die Nullstellen auf der oberen Halbebene mit wachsendem r unbegrenzt der Geraden $\varphi = \frac{\alpha}{2}\pi$. Ist dagegen $\alpha > 1$, so wächst der Abstand der Nullstellen von der in Rede stehenden Geraden mit r über jede Grenze. In beiden Fällen ist aber nach (32) δ eine mit wachsendem r gegen Null abnehmende positive Grösse.

Auch bei der folgenden Diskussion gestaltet sich die Sache etwas verschieden, je nachdem $0 < \alpha < 1$ oder $1 < \alpha < 2$.

a) $0 < \alpha < 1$.

Da hier $\Gamma(-\alpha)$ eine negative Grösse bedeutet, so führt die bei einer Nullstelle annäherungsweise geltende Bedingung, dass die Argumente der beiden in (25) enthaltenen Glieder als Differenz ein ungerade Vielfaches der Grösse π haben sollen, auf eine Relation

$$(34) \qquad r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{\varphi}{\alpha} = -\varphi + 2k\pi$$

oder nach Benutzung der Substitution (29)

$$(35) \qquad r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\delta}{\alpha} = -\frac{\alpha}{2}\pi - \delta + 2k\pi.$$

Beachtet man nun den in (32) gegebenen Näherungswert für δ, so lässt sich erschliessen, dass $\cos\frac{\delta}{\alpha} - 1$ von der Grössenordnung $r^{-\frac{1}{\alpha}}(\log r)^2$ sein muss. Hiernach lässt sich (35) durch eine relation von der Gestalt

$$(36) \qquad r^{\frac{1}{\alpha}} = -\frac{\alpha}{2}\pi + 2k\pi + \left[r^{-\frac{1}{\alpha}}(\log r)^2\right]$$

ersetzen. Sollte nun hier zu jedem ganzzahligen Wert von k eine Nullstelle sowohl auf der oberen als unteren Halbebene gehören, so wäre die Anzahl der Nullstellen, deren Moduln $< r$ sind, sehr genau durch den Ausdruck

$$\frac{r^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi}$$

angegeben.

In wie weit diese Vermutung bestätigt wird, wollen wir jetzt untersuchen, indem wir auch hier das Integral

$$(18) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d\log E_a(x)$$

berechnen. Dabei ist es vorteilhaft den Integrationskreis $|x| = r$ so zu wählen, dass der Kurve (31), und folglich auch der symmetrischen Kurve auf der unteren Halbebene, in einem solchen Punkte begegnet wird, dass die Argumente der beiden in (25) enthaltenen Glieder sich um ein Vielfaches der Grösse 2π unterscheiden. Es soll demnach für den Schnittpunkt mit der Kurve (31) eine Relation

$$(37) \qquad r^{\frac{1}{a}}\cos\frac{\delta}{a} = -\frac{a}{2}\pi - \delta + (2k+1)\pi$$

gelten, wobei die positive ganze Zahl k genügend gross gewählt werden muss, damit die folgenden Auseinandersetzungen einwandfrei seien.

Jetzt zerlegen wir $E_a(x)$ in zwei Faktoren, so dass das jedesmalige Hauptglied in der Entwicklung (5) den einen Faktor liefert:

$$(38) \qquad E_a(x) = \frac{1}{a}e^{r^{\frac{1}{a}}e^{\frac{\varphi i}{a}}}(1+u); \qquad \left(-\frac{a}{2}\pi - \delta \leq \varphi \leq \frac{a}{2}\pi + \delta\right),$$

$$(39) \qquad E_a(x) = \frac{1}{a}\frac{x^{-1}}{\Gamma(-a)}(1+u) \qquad \left(\frac{a}{2}\pi + \delta \leq \varphi \leq 2\pi - \frac{a}{2}\pi - \delta\right).$$

Für die Argumente $\pm\left(\frac{a}{2}\pi + \delta\right)$ sind die Grössen $e^{r^{\frac{1}{a}}e^{\frac{\varphi i}{a}}}$ und $\frac{x^{-1}}{\Gamma(-a)}$ auf Grund der speciellen Wahl von r einander gleich; dasselbe gilt mithin auch von den beiden in (38) und (39) auftretenden u-Werten. Es ist also $1+u$ längs der Integrationskurve eine kontinuierliche Grösse. Da sich weiter in derselben Weise wie die entsprechende Tatsache im vorigen Abschnitte nachweisen lässt, dass diese Grösse stets ein positives Hauptglied enthält, so hat man auch hier

$$(22) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d\log(1+u) = 0.$$

Nimmt man jetzt auf (37), (38), (39) und (22) Bezug, so ergiebt sich sofort

$$(40) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d\log E_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i}\Bigg|_{-\frac{\alpha}{2}\pi-\delta}^{\frac{\alpha}{2}\pi+\delta} r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\varphi i}{\alpha}} + \frac{1}{2\pi i}\Bigg|_{\frac{\alpha}{2}\pi+\delta}^{2\pi-\frac{\alpha}{2}\pi-\delta} - \varphi i$$

$$= \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\delta}{\alpha}}{\pi} - 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{\pi} = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{\pi} + 2k + 1 - 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{\pi} = 2k.$$

Man hat aber

$$\frac{r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\delta}{\alpha}}{\pi} - 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{\pi} = \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi} - 1 + \frac{\alpha}{2} + \left[r^{-\frac{1}{\alpha}}(\log r)^2\right].$$

Hiernach ergiebt sich

$$(41) \qquad \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}}{\pi} - 1 + \frac{\alpha}{2}$$

als Ausdruck für die Anzahl der Nullstellen, deren Moduln $< r$ sind. Man hat sogar hier, jedenfalls für genügend grosse r-Werte, die genaue Anzahl der Nullstellen, falls r so gewählt wird, dass (41) *eine gerade Zahl bedeutet.*

b) $1 < \alpha < 2$.

Die Modifikationen, welche hier die vorangehenden Entwicklungen erleiden müssen, weil jetzt $\Gamma(-\alpha)$ eine positive Grösse bezeichnet, bestehen eigentlich nur darin, dass die gerade Zahl $2k$ durch die ungerade Zahl $2k+1$ ersetzt werden soll und umgekehrt.

Für die Anzahl der Nullstellen, deren Moduln $< r$ sind, hat man also auch in diesem Falle den Ausdruck (41). *Es besteht aber der Unterschied, dass man jetzt die genaue Anzahl der Nullstellen bekommt, wenn* (41) *eine ungerade Zahl bedeutet.*

Die hieraus zu ziehende Folgerung, dass die Funktion $E_\alpha(x)$ in diesem Falle *eine ungerade Anzahl negativer Nullstellen* (*und also mindestens eine*) besitzt, wird dadurch bestätigt, dass für $\lim x = -\infty$ das Hauptglied $\frac{1}{\alpha}\frac{x^{-1}}{\Gamma(-\alpha)}$ und mithin auch $E_\alpha(x)$ eine negative Grösse ist. Hieraus folgt

ja, da $E_\alpha(x)$ für positive x-Werte positiv ist, dass die Funktion auf der negativen Halbaxe eine ungerade Anzahl von Zeichenwechseln erleiden muss.

Man hat den Fall $\alpha = 1$ in solcher Weise als Grenzfall aufzufassen, dass für $\alpha = 1 - \delta$ oder $\alpha = \frac{1}{1-\delta}$ die Nullstellen, zu denen die niedrigsten Moduln gehören, sich mit abnehmendem δ immer mehr von dem Anfangspunkte entfernen. Die Bedeutung des Ausdruckes (41) für die Anzahl der Nullstellen fängt dann also erst bei verhältnissmässig grösseren r-Werten an.

Man überzeugt sich durch ziemlich einfache Betrachtungen, dass *die endliche Anzahl negativer Nullstellen, welche $E_\alpha(x)$ für $1 < \alpha < 2$ besitzt, jede gegebene Grenze überschreitet, wenn die Differenz $2 - \alpha = \delta$ genügend klein wird.* Betrachtet man nämlich die Verhältnisse auf der negativen Halbaxe, so ergiebt sich leicht, dass *für niedrigere r-Werte* nicht das Glied

$$-\frac{1}{\alpha}\frac{r^{-1}}{\Gamma(-\alpha)},$$

sondern

$$\frac{1}{\alpha}\left[e^{r^{\frac{1}{\alpha}}e^{\frac{\varphi i}{\alpha}}} + e^{r^{\frac{1}{\alpha}}e^{-\frac{\varphi i}{\alpha}}}\right] = \frac{2}{\alpha}e^{r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\pi}{\alpha}}\cos\left(r^{\frac{1}{\alpha}}\sin\frac{\pi}{\alpha}\right) \tag{14}$$

den bestimmenden Einfluss ausübt. Man hat also Grund anzunehmen, es seien den ersten Zeichenänderungen von (14) Nullstellen der Funktion $E_\alpha(x)$ zugeordnet. Unter der Voraussetzung, dass dies zutrifft, so lange

$$\frac{2}{\alpha}e^{r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\pi}{\alpha}} > \frac{1}{\alpha}\frac{r^{-1}}{\Gamma(-\alpha)},$$

würde man in erster Annäherung den Ausdruck

$$\frac{4}{\pi^2(2-\alpha)}\log\frac{1}{2-\alpha}$$

für die Anzahl der negativen Nullstellen erhalten.

Ist andererseits $\alpha - 1$ eine kleine Grösse, so erschliesst man durch ähnliche Überlegungen, dass die Funktion $E_\alpha(x)$ blos eine einzige Null-

stelle auf der negativen Halbaxe besitzt. Sucht man eine Entwicklung für den zugehörigen Modul, so ergiebt sich als Hauptglied

$$\log\frac{1}{\alpha-1}.$$

Da diese Nullstelle nach aller Wahrscheinlichkeit die dem Anfangspunkte nächstliegende ist, so ersieht man hieraus, wie die Nullstellen ins Unendliche rücken, wenn α sich dem Werte 1 nähert.

§ 4.

Ist zuletzt α *eine imaginäre Zahl* $=\beta+i\gamma$, so gestalten sich die Sachen in ganz analoger Weise. Der wesentliche Unterschied rührt davon her, dass $\varphi=$ const. jetzt nicht länger eine gerade Linie, sondern eine logarithmische Spirale bedeutet.

Zunächst findet man, dass, falls die Umgebung von einer oder zwei φ-Spiralen ausgenommen wird, die Entwicklung (5′) stets ein einziges Hauptglied enthält, dessen absoluter Betrag für genügend grosse r die Summe der absoluten Beträge der übrigen Glieder übersteigt. *Die Nullstellen mussen also jetzt eine oder zwei Annahmespiralen begleiten.*

Unter den in (5′) auftretenden Gliedern betrachten wir zuerst diejenigen von der Gestalt

$$(42)\qquad e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\theta i}{\alpha}}} = e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma\theta}{\beta^2+\gamma^2}} \cos\frac{\beta\theta}{\beta^2+\gamma^2}} \left[\cos\left(r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma\theta}{\beta^2+\gamma^2}} \sin\frac{\beta\theta}{\beta^2+\gamma^2}\right) + i\sin\left(r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma\theta}{\beta^2+\gamma^2}} \sin\frac{\beta\theta}{\beta^2+\gamma^2}\right)\right],$$

wo mit Rücksicht auf (4′) die Ungleichungen

$$(4'')\qquad -\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta}\pi < \theta < \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta}\pi$$

stattfinden sollen. Wird nun der absolute Betrag

$$(43)\qquad e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma\theta}{\beta^2+\gamma^2}} \cos\frac{\beta\theta}{\beta^2+\gamma^2}}$$

für $\theta = \theta_0$ ein Maximum, so ergiebt sich die Identität

$$\operatorname{tg} \frac{\beta \theta_0}{\beta^2 + \gamma^2} = \frac{\gamma}{\beta}. \tag{44}$$

Hieraus findet man zwei mit (4″) verträglichen Lösungen. Doch liefert nur diejenige ein Maximum, für welche $\operatorname{arc\,tg} \frac{\gamma}{\beta}$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Für das Maximum von (43) hat man nach dieser Festsetzung

$$e^{r^{\frac{1}{\beta}} \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}} e^{\frac{\gamma}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{\gamma}{\beta}}}. \tag{45}$$

Ist für das Maximum $\theta_0 = 0$, so muss $\gamma = 0$, d. h. α eine reelle Grösse sein. Geht man rechts oder links von dem besonderen Argumente $\theta = \theta_0$ aus, so wächst (43) mit r über jede Grenze, so lange

$$-\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta} \pi < \theta < \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta} \pi, \tag{46}$$

und man erkennt, dass für $\varphi + 2\varkappa\pi = \theta$ es stets ein derartiges Glied in der Entwicklung (5′) geben muss, falls

$$\text{a)} \quad \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} > 2.$$

In diesem Falle (sowie auch, wenn das Zeichen $>$ durch $=$ ersetzt wird) sind also die Hauptglieder in (5′) stets von der Gestalt (42).

Für welche φ-Spiralen bekommt man nun zwei derartige Hauptglieder? Da die Glieder, für welche die Bedingung (46) erfüllt ist, immer mehr abnehmen, wenn θ, sei es rechts oder links, sich von θ_0 entfernt, so ist es leicht ersichtlich, dass dieser Fall dann und nur dann eintritt, wenn für $\theta_1 > \theta_0 > \theta_1 - 2\pi$

$$e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma \theta_1}{\beta^2+\gamma^2}} \cos \frac{\beta \theta_1}{\beta^2+\gamma^2}} = e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma(\theta_1 - 2\pi)}{\beta^2+\gamma^2}} \cos \frac{\beta(\theta_1 - 2\pi)}{\beta^2+\gamma^2}}. \tag{47}$$

Hiernach ergiebt sich

$$\operatorname{tg} \frac{\beta \theta_1}{\beta^2 + \gamma^2} = \frac{e^{\frac{2\pi\gamma}{\beta^2+\gamma^2}} - \cos \frac{2\pi\beta}{\beta^2 + \gamma^2}}{\sin \frac{2\pi\beta}{\beta^2 + \gamma^2}} = \operatorname{tg} \frac{\pi\beta}{\beta^2 + \gamma^2} + \frac{e^{\frac{2\pi\gamma}{\beta^2+\gamma^2}} - 1}{\sin \frac{2\pi\beta}{\beta^2 + \gamma^2}}. \tag{48}$$

Die einzige Lösung hierzu, welche den besprochenen Nebenbedingungen genügt, *reduziert sich nur in den beiden Grenzfällen* $\gamma = 0$ *und* $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} = 2$ *auf* $\theta_1 = \pi$.

Es ist um diese Spirale $\varphi = \theta_1$, *dass sich die Nullstellen häufen, und zwar so, dass ihre Entfernung von der Spirale für* $\lim r = \infty$ *unendlich klein wird.*

Die Anzahl der Nullstellen, deren Moduln $< r$ sind, lässt sich auch hier durch die Berechnung des Integrals

$$(18) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d \log E_a(x)$$

bestimmen, indem man $E_a(x)$ in zwei Faktoren zerlegt:

$$(49) \qquad E_a(x) = \frac{1}{a} e^{r^{\frac{1}{a}} e^{\frac{\gamma\varphi}{\beta^2+\gamma^2}} e^{\frac{\beta\varphi}{\beta^2+\gamma^2}i}} (1 + u) \qquad (\theta_1 - 2\pi \leqq \varphi \leqq \theta_1).$$

Wird r so gewählt, dass ersterer Faktor für $\varphi = \theta_1$ und $\varphi = \theta_1 - 2\pi$ Argumente, welche um ein Vielfaches von 2π differieren, besitzt, so lässt sich in derselben Weise wie in den vorigen Abschnitten beweisen, dass

$$(22) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d \log (1 + u) = 0.$$

Man bekommt alsdann

$$(50) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d \log E_a(x) = \frac{1}{2\pi i} \Bigg|_{\theta_1 - 2\pi}^{\theta_1} r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\gamma\theta}{\beta^2+\gamma^2}} e^{\frac{\beta\theta}{\beta^2+\gamma^2}i}$$

$$= \frac{r^{\frac{1}{\beta}}}{2\pi} e^{\frac{\gamma(\theta_1 - \pi)}{\beta^2+\gamma^2}} \sqrt{e^{\frac{2\pi\gamma}{\beta^2+\gamma^2}} + e^{-\frac{2\pi\gamma}{\beta^2+\gamma^2}} - 2 \cos \frac{2\pi\beta}{\beta^2 + \gamma^2}}.$$

Dieser verhältnissmässig komplizierte Ausdruck vereinfacht sich in den Grenzfällen, wo $\theta_1 - \pi = 0$. Für $\gamma = 0$, also $\alpha = \beta$, ergiebt sich demnach der schon in § 2 hergeleitete Ausdruck

$$(17) \qquad \frac{r^{\frac{1}{a}} \sin \frac{\pi}{a}}{\pi}.$$

Ist dagegen $\beta^2 + \gamma^2 = 2\beta$; so lässt sich (50) in die Gestalt

$$(51) \qquad \frac{r^{\frac{1}{\beta}}}{2\pi}\left(e^{\frac{\gamma\pi}{2\beta}} + e^{-\frac{\gamma\pi}{2\beta}}\right)$$

umformen, d. h. man bekommt für die Anzahl der Nullstellen den gleichen Ausdruck wie im Falle

$$\text{b)} \quad \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} < 2.$$

Da jetzt zwei Hauptglieder in (5') auftreten, so müssen (ebenso wie im vorigen Abschnitte) an den Nullstellen die Moduln dieser Glieder annähernd gleich gross sein. Hieraus folgert man leicht, dass *die Rolle der Strahlen* $\varphi = \mp\frac{a\pi}{2}$ *in Bezug auf die Nullstellen jetzt von den Spiralen* $\varphi = \mp\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi$ *übernommen wird.* In Übereinstimmung hiermit wird der Abstand der Nullstellen von der zugehörigen Spirale mit wachsendem r verschwindend klein oder nicht, je nachdem $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} < 1$ oder $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} \geqq 1$.

Ebenfalls empfiehlt es sich hier behufs der Berechnung des Integrals (18) die Funktion $E_a(x)$ in zwei Faktoren zu zerlegen, indem das jedesmalige Hauptglied den einen Faktor angiebt. Also

$$(38') \quad E_a(x) = \frac{1}{a} e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\varphi i}{a}}}(1 + u); \qquad \left(-\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi - \delta_1 \leqq \varphi \leqq \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi + \delta\right)$$

$$(39') \quad E_a(x) = \frac{1}{a}\frac{x^{-1}}{\Gamma(-a)}(1 + u), \qquad \left(\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi + \delta \leqq \varphi \leqq 2\pi - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi - \delta_1\right)$$

wenn für $\varphi = -\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi - \delta_1$ bez. $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\beta}\pi + \delta$ die Differenz

$$(26') \qquad \left|e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\varphi i}{a}}}\right| - \frac{r^{-1}}{|\Gamma(-a)|}$$

gleich Null wird. In einer Hinsicht stellt doch die Sache sich hier weniger bequem, weil jetzt nicht r so gewählt werden kann, dass u an *beiden*

Grenzstellen gleiche Werte in (38') und (39') erhält. Für die Umgebung dieser Grenzstellen kann man aber die Diskussion an die Substitution

$$(52) \qquad E_a(x) = \frac{1}{a}\left[e^{r^{\frac{1}{\beta}} e^{\frac{\varphi i}{a}}} + \frac{r^{-1}}{\Gamma(-a)}\right](1 + v)$$

anknüpfen, wobei man noch eine solche Wahl von r treffen kann, dass für den Kreis $|x| = r$ die Ungleichung $|v| < 1$ erfüllt ist. Man findet so ohne Schwierigkeit, dass der Ausdruck (51) hier dieselbe Rolle für die Anzahl der Nullstellen spielt wie im vorigen Abschnitte der Ausdruck $\frac{r^{\frac{1}{a}}}{\pi}$, auf welchen er sich ja für $\gamma = 0$ reduziert.

Die Anwendbarkeit der obigen Metoden lässt sich insbesondere nach zweierlei Richtungen erweitern.

Erstens kann man nämlich $E_a(x)$ durch die Differenz von $E_a(x)$ mit einer konstanten Grösse oder einer einfach gebauten ganzen Funktion ersetzen. Es treten dann nur in den Entwicklungen (5) und (5') neue Glieder hinzu, und die Rolle der Hauptglieder in den verschiedenen Teilen der komplexen Ebene wird in anderer Weise verteilt.

Zweitens erlauben die Metoden des Herrn Mittag-Leffler andere Funktionen in mannigfaltiger Weise (auch solche von unendlicher Höhe) zu bilden, für welche sich analoge halbkonvergente Entwicklungen wie (5) und (5') ergeben. Es lassen sich dann in ähnlicher Weise wie hier Untersuchungen über die Nullstellen ausführen.

SUR LA MÉTHODE HORISTIQUE DE GYLDÉN

PAR

H. POINCARÉ

à PARIS.

Introduction.

Gyldén a rendu de très grands services à la Science; il a créé un certain nombre de méthodes nouvelles qui ont pu être appliquées avec succès et dans certains cas substituées avec avantage aux anciens procédés. La plupart des méthodes qu'il a proposées dans ses premiers écrits étaient correctes; Harzer et Brendel en ont tiré une théorie des petites planètes. Ces méthodes, à la vérité, n'étaient pas sans inconvénient, elles donnaient lieu à une foule de complications inutiles; au lieu de prendre le temps pour variable indépendante, elles prennent la longitude vraie, ou des variables auxiliaires peu différentes de cette longitude, elles introduisent une foule de variables parasites et encombrantes. Il en résulte que les équations perdent leur forme canonique, et que, si l'on veut simplement écrire par exemple l'équation des forces vives, il faut se livrer à des calculs interminables. J'estime donc que ces méthodes, quelque intéressantes qu'elles aient été autrefois, n'ont plus aujourd'hui qu'un intérêt historique, et qu'on ne saurait plus en recommander l'emploi, parce que maintenant il y en a d'autres, comme par exemple celles de Hill et de Brown qui ont les mêmes avantages sans avoir les mêmes inconvénients.

Plus tard Gyldén est entré dans une voie nouvelle et a abouti à des résultats qu'il a rassemblés dans son ouvrage *Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes,* Stockholm 1892. Moins heureux que dans ses premiers travaux, il s'est cette fois complètement trompé.

Considérons une équation différentielle quelconque, faisons pager certains termes dans le 1[er] membre, d'autres dans le 2[d]. En 1[ere] approximation, nous remplacerons *dans le 2[d] membre* les fonctions inconnues par zéro et nous intégrerons les équations ainsi obtenues; en 2[de] approximation nous remplacerons *dans le 2[d] membre* les fonctions inconnues par leurs valeurs de 1[ère] approximation, et ainsi de suite. Tel est le principe fondamental des nouvelles méthodes d'approximation de GYLDÉN, comme des anciennes et nous le retrouverons partout.

Ce principe est légitime, mais à une condition, c'est que les termes relégués dans le 2[d] membre et négligés en 1[ère] approximation soient notablement plus petits ou moins importants que les termes conservés dans le 1[er] membre. Sans cela, il est clair que le développement ne sera pas convergent. Nous aurons donc à examiner si l'analyse de GYLDÉN satisfait à cette condition.

On sait que dans les méthodes ordinaires de la mécanique céleste, on voit s'introduire ce qu'on appelle de petits diviseurs, de sorte que le coefficient de certains termes prend la forme

$$\frac{b}{p^2}$$

p étant très petit, et deviennent infinis quand p s'annule. GYLDÉN s'efforce de prouver qu'un calcul plus exact doit donner:

$$\frac{b}{\nu^2 + p^2}$$

ν étant une quantité qui ne s'annule pas, de sorte que le coëfficient ne devient pas infini et reste même très petit. C'est ce qu'il appelle la méthode horistique, ainsi nommée d'un mot grec d'où vient également horizon.

Il cherche à tirer de là diverses conséquences:

1° Que les séries obtenues en mécanique céleste sont convergentes si l'on tient compte des termes horistiques.

2° Que les termes d'ordre élevé de la fonction perturbatrice ne sauraient donner lieu au phénomène connu sous le nom de libration.

Ces conséquences sont manifestement fausses; mais j'ai cru longtemps que l'erreur provenait simplement de ce que GYLDÉN ne se doutait pas de ce que les géomètres appellent une série convergente et des précautions minutieuses qu'il faut prendre dans une démonstration de convergence.

Je croyais que, si GYLDÉN est protégé contre la critique par son obscurité même, cette obscurité empêcherait également qu'on cherchât à appliquer ses méthodes qui deviendraient ainsi inoffensives et tomberaient dans l'oubli après sa mort.

Je me trompais; d'abord ses erreurs commencent, comme nous le verrons bientôt, dès le début de son analyse; on ne peut donc le prendre pour guide, non seulement pour démontrer la convergence des développements, mais même pour en calculer approximativement les 1ers termes. De plus, certaines personnes ont voulu appliquer ces méthodes à des problèmes pratiques, et elles ont été naturellement conduites à l'erreur. D'autres ont repris les affirmations de GYLDÉN sur la convergence des séries et les ont présentées comme des vérités établies.

Il devenait donc nécessaire d'analyser dans ses détails l'ouvrage cité *Nouvelles Recherches*... et d'en discuter les conclusions. C'est là l'objet du présent travail, nous suivrons pas à pas l'ouvrage de GYLDÉN et nous en examinerons successivement chaque chapitre.

J'aurais voulu conserver les notations de GYLDÉN; mais elles sont tellement compliquées et tellement changeantes que je n'en ai pas eu le courage. Je donne cependant des indications suffisantes pour qu'on puisse passer facilement d'une notation à l'autre.

Dans les citations, quand je renvoie à une page ou à un paragraphe désigné par le signe § ou N° suivi d'un numéro, il faut entendre la page ou le paragraphe de l'ouvrage de GYLDÉN *Nouvelles Recherches*.... Quand je renvoie à un paragraphe en écrivant le mot paragraphe en toutes lettres, il s'agit d'un paragraphe du présent travail. Enfin quand je renvoie à mon ouvrage *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Paris, Gauthier Villars, j'écris simplement *Méthodes Nouvelles*.

Analyse du Chapitre Premier.

Le Chapitre 1er est consacré à l'équation

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1-\alpha)\rho - \beta\rho^3 = -\gamma\cos v. \tag{1}$$

GYLDÉN applique à cette équation 4 méthodes différentes dont une fondée

sur l'emploi des coëfficients indéterminés et 3 sur l'emploi des fonctions elliptiques.

Mais avant d'aller plus loin, disons quels sont les résultats qui sont démontrés au sujet de cette équation et que GYLDÉN aurait dû retrouver. Si l'on applique à l'équation (1) la méthode de la variation des constantes arbitraires de LAGRANGE en regardant β et γ comme des quantités très petites, on obtient une série procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de deux arguments:

$$v \quad \text{et} \quad w = v\sqrt{1-\alpha} + \text{const.}$$

et suivant les puissances de v; cette série où v figure en dehors des signes trigonométriques est convergente pourvu que v soit suffisamment petit. Je l'appellerai la série S.

Le terme général de la série S est donc de la forme:

$$Av^m \cos(pv + qw + h).$$

Si nous réunissons tous les termes de la série S qui contiennent en facteur une des lignes trigonométriques d'un même arc $pv + qw$; on peut en faire la somme, et cette somme a pour valeur:

$$A \cos(pv + qf + h)$$

où f est un nouvel argument de la forme

$$f = \sigma v + \varepsilon$$

σ étant une nouvelle constante donnée et ε une constante arbitraire d'intégration. En groupant les termes de cette manière, on obtient une nouvelle série S_1 procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples des deux arguments v et f, et ne contenant pas v en dehors des signes trigonométriques. Cette nouvelle série S_1 est *divergente,* au sens que les mathématiciens attachent à ce mot; elle peut néanmoins être employée dans un but pratique pourvu que ce soit avec circonspection. Elle peut donner une valeur approchée de la fonction inconnue, si l'on s'arrête à un certain terme.

Cette série S_1 dépend de deux constantes arbitraires; la 1ère est ε, et figure dans f; la 2de peut être choisie de bien de manières; à l'exemple

de GYLDÉN nous prendrons le coëfficient du terme en $\cos f$ et nous l'appellerons x. Si l'on fait $x = 0$, tous les termes dépendant de f disparaissent; la série S_1 ne contient plus que l'argument v, elle ne dépend plus de la constante ε; grâce à cette réduction, *la série S_1 devient convergente.* C'est la *solution périodique.*

Supposons que la constante x ne soit pas nulle, mais très petite et négligeons les termes en x^2, nous trouvons ainsi:

$$\rho = H + xH_1 \cos f + xH_2 \sin f$$

où H indépendant de x représente la solution périodique que nous venons de définir et où H, H_1, H_2 sont développables suivant les sinus et cosinus des multiples de l'argument unique v. Cette série représente les solutions très voisines de la solution périodique (cf. *Méthodes Nouvelles,* chapitre IV); *elle est convergente;* je l'appellerai S_2.

Dans les différents termes de S et de S_1 figurent ce que l'on appelle de *petits diviseurs* introduits par l'intégration. Parmi eux, nous distinguerons le petit diviseur α qui s'introduit dans la série S quand on intègre un terme en $w + n(w - v)$ et qu'on retrouve dans la série S_1 déduite de S. Parmi les termes de S_1, conservons seulement ceux qui contiennent α au dénominateur à la même puissance que β ou γ au numérateur. L'ensemble de ces termes formera une nouvelle série S_3; cette série sera *convergente.* C'est celle à laquelle conduit la *méthode de Delaunay.* Comment se fait-il que la série S_3 étant convergente, la série S_1 soit néanmoins divergente; c'est à cause de la présence des petits diviseurs autres que α; mais comme ces petits diviseurs ne se rencontrent que dans des termes d'ordre élevé, la série convergente S_3 nous donnera une valeur approchée de la fonction inconnue pourvu qu'on ne veuille pas l'appliquer pendant un intervalle de temps trop long; c'est là ce qui fait la légitimité de la méthode de DELAUNAY.

Tels sont les résultats qui sont vrais de l'équation (1) comme des équations générales du problème des 3 corps et des équations analogues.

Voyons maintenant ce qu'a fait GYLDÉN; il cherche à satisfaire à l'équation en posant

$$\rho = x \cos f + x_1 \cos v + R$$

et de façon que R soit petit par rapport aux deux autres termes. Il dé-

signe par $\frac{1}{2}(R^2)$ la partie constante de R^2, d'où il résulte que (R^2) est petit et positif et il arrive aux équations suivantes (équations 4 de la page 10)

$$(2)\qquad \begin{cases} -\sigma^2 + (1-\alpha) + \frac{3}{4}\beta x^2 - \frac{3}{2}\beta[x^2 + x_1^2 + (R^2)] = 0 \\ -\alpha + \frac{3}{4}\beta x_1^2 - \frac{3}{2}\beta[x^2 + x_1^2 + (R^2)] = -\frac{\gamma}{x_1}. \end{cases}$$

Remarquons pour comparer ces équations à celles de GYLDÉN, que α, β, σ et 1 représentent ici les β_1, β_2, $1-\varsigma$ et $1-\sigma$ de GYLDÉN.

Ces équations sont-elles exactes; il suffit pour le voir de les comparer à la série convergente S_2 définie plus haut et que nous savons former.

Soit d'abord $x = 0$; dans ce cas la série S_1 ou S_2 se réduit à celle qui définit la solution périodique; le terme le plus gros est le terme:

$$\rho = x_1 \cos v.$$

Alors les conclusions de GYLDÉN sont exactes et on trouve bien

$$(3)\qquad \frac{3}{4}\beta x_1^3 + \alpha x_1 - \gamma = 0$$

ce qui est conforme à l'équation (2), puisque x est nul et R très petit. Cette équation (3) limite bien la valeur de x_1 comme GYLDÉN l'a remarqué, et c'est cette remarque qui a été l'origine de tout son travail, où il a vainement cherché à la généraliser. On voit l'influence du terme en $\beta\rho^3$, et une comparaison physique la fera mieux comprendre. Si ce terme n'existait pas, l'équation (1) définirait le mouvement d'un pendule rigoureusement isochrone qui oscillerait sous l'influence d'une force périodique $\gamma \cos v$. Si cette force se trouve en résonance avec la période propre du pendule, les oscillations pourront devenir très-grandes. Grâce à l'addition de ce terme, le pendule n'est plus rigoureusement isochrone; s'il y a résonance pour les oscillations infiniment petites, l'amplitude croîtra d'abord, mais quand elle sera plus grande, la période propre du pendule ne sera plus la même, la résonance disparaîtra et l'amplitude cessera de croître. Les constructeurs de navires ont souvent employé un artifice analogue.

Si nous supposons au contraire γ et x_1 nuls, l'équation (1) s'intègre très aisément par les fonctions elliptiques, on pourrait alors former aisément

la $1^{\text{ère}}$ équation (2) en y faisant $x_1 = 0$ et négligeant R, qui est en effet négligeable si x est petit. On reconnaîtrait ici encore que la formule de GYLDÉN est exacte. Observons que dans ces deux cas, il n'y a dans ρ qu'un seul argument, v dans le 1er cas, f dans le 2^{d}.

Supposons maintenant que x ne soit pas nul, mais très petit. Quelle devrait être d'après GYLDÉN la valeur de σ? Si x est très petit, il en sera de même de R. On aura donc.

$$\sigma^2 = 1 - \alpha - \frac{3}{2}\beta x_1^2. \tag{2 bis}$$

Cherchons maintenant la *vraie* valeur de σ. Soit ρ_0 la solution périodique; et $\rho = \rho_0 + \varepsilon$; dans ce cas ρ_0 est indépendant de x et ε est de l'ordre de x; nous pouvons donc négliger ε^2, ce qui donne:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dv} + (1 - \alpha - 3\beta\rho_0^2)\,\varepsilon = 0$$

et comme ρ_0 est sensiblement égal à $x_1 \cos v$, cela fait

$$\frac{d^2\varepsilon}{dv^2} + \left(1 - \alpha - \frac{3}{2}\beta x_1^2 - \frac{3}{2}\beta x_1^2 \cos 2v\right)\varepsilon = 0$$

ou:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dv^2} + \varepsilon\,(q^2 - q_1 \cos 2v) = 0 \tag{4}$$

en posant

$$q^2 = 1 - \alpha - \frac{3}{2}\beta x_1^2,\quad q_1 = \frac{3}{2}\beta x_1^2.$$

C'est là une équation qui a fait l'objet de travaux très nombreux que j'ai résumés dans le Chapitre XVII des Méthodes Nouvelles.

Soit $\varepsilon = F(v)$ la solution de l'équation (4) qui se réduit à 1 et dont la dérivée se réduit à 0 pour $v = 0$; on aura:

$$\cos \sigma\pi = F(\pi).$$

Développons $F(v)$ suivant les puissances croissantes de q_1 et de $1 - q^2 = \tau$ il viendra:

$$F(v) = \cos v + \left(\frac{\tau}{2} + \frac{q_1}{4}\right) v \sin v + \frac{q_1}{16}(\cos v - \cos 3v) + R_1$$

où R_1 contiendront les termes dépendant des puissances plus élevées de τ et de q_1; parmi ces termes, nous ne conserverons que ceux qui dépendent des secondes puissances, et qui ne s'annulent pas pour $v=\pi$. Or nous aurons des termes en $v \sin v$, en $(\cos v - \cos 3v)$, en $(\cos v - \cos 5v)$, en $v^2 \cos v$; nous n'avons à nous occuper que des derniers qui sont les seuls qui ne s'annulent pas pour $v=\pi$. Or R_1 est donné par l'équation:

$$\frac{d^2R_1}{dv^2} + R_1 = (\tau + q_1 \cos 2v)\left[\left(\frac{\tau}{2} + \frac{q_1}{4}\right) v \sin v + \frac{q_1}{16}(\cos v - \cos 3v)\right].$$

Nous pouvons négliger le terme en $\cos v - \cos 3v$ qui ne peut nous donner un terme en $v^2 \cos v$. D'autre part:

$$(\tau + q_1 \cos 2v)\, v \sin v = \left(\tau - \frac{q_1}{2}\right) v \sin v + \frac{q_1}{2} v \sin 3v$$

où le 1[er] terme seul peut nous donner un terme en $v^2 \cos v$; il nous suffira donc d'écrire:

$$\frac{d^2R_1}{dv^2} + R_1 = \frac{1}{2}\left(\tau^2 - \frac{q_1^2}{4}\right) v \sin v + \ldots$$

d'où:

$$R_1 = -\frac{1}{8}\left(\tau^2 - \frac{q_1^2}{4}\right) v^2 \cos v + - \,..$$

en n'exprimant que le terme en $v^2 \cos v$. Il vient donc:

$$F(\pi) = -1 + \frac{\pi^2}{8}\left(\tau^2 - \frac{q_1^2}{4}\right).$$

Or

$$\cos \sigma\pi = -1 + \frac{(1-\sigma)^2\pi^2}{2}.$$

Il reste donc:

$$(1-\sigma)^2 = \frac{1}{4}\left(\tau^2 - \frac{q_1^2}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\alpha^2 + 3\alpha\beta x_1^2 + \frac{27}{16}\beta^2 x_1^4\right).$$

La formule de Gyldén donnerait:

$$(1-\sigma)^2 = \frac{\tau^2}{4} = \frac{1}{4}\left(\alpha^2 + 3\alpha\beta x_1^2 + \frac{9}{4}\beta^2 x_1^4\right).$$

Avec la formule de GYLDÉN, σ est toujours réel; avec la *vraie* formule, σ peut devenir imaginaire et c'est ce qui arrive par exemple si α est positif, β négatif et assez grand. Les différences peuvent être tout a fait énormes; elles ne peuvent s'expliquer par l'influence du terme en (R^2) qui non seulement devrait être très petit, mais serait toujours de même signe; et étant toujours réel donnerait toujours pour $1 - \sigma$ une valeur réelle.

Cherchons d'ailleurs le terme principal de R. Un calcul simple nous donne en négligeant les carrés de τ et de q_1 et en posant $\sigma = 1 - s$

$$\rho = x_1 \cos v + x \cos f + x \cos (f - 2v) \frac{\sqrt{2\tau - q_1} - \sqrt{2\tau + q_1}}{\sqrt{2\tau - q_1} + \sqrt{2\tau + q_1}}$$

ce qui nous donne la valeur de R; le terme le plus important de R, c'est en effet le terme en $\cos (f - 2v)$. Le rapport du terme en $\cos (f - 2v)$ au terme en $\cos f$ c'est:

$$\frac{\sqrt{2\tau - q_1} - \sqrt{2\tau + q_1}}{\sqrt{2\tau - q_1} + \sqrt{2\tau + q_1}}.$$

Or le numérateur et le dénominateur sont du même ordre de grandeur; donc R n'est pas négligeable devant ρ_0.

Le seul cas où R serait négligeable devant ρ_0, serait celui où q_1 serait négligeable devant τ, c'est à dire βx_1^2 devant α; c'est à dire celui où la considération du terme en $\beta\rho^3$ est inutile, où les méthodes ordinaires suffisent, où celle de GYLDÉN est sans objet.

GYLDÉN dit page 17 que R reste même dans les cas exceptionnels de l'ordre de ρ_0 (c'est à dire de $x \cos f + x_1 \cos v$), mais qu'elle devient très petite dans les cas ordinaires, à savoir lorsque la valeur absolue de ω est sensiblement plus grande que l'unité (c'est à dire lorsque les 3 racines de l'équation (3) diffèrent sensiblement l'une de l'autre). On peut se demander ce qu'il entend par *sensiblement*. Quand il dit que $|\omega|$ est sensiblement > 1, veut-il dire que $|\omega| - 1$ par exemple n'est pas très petit, ou que $|\omega|$ est très grand.

Dans le 1[er] cas, il se trompe, nous venons de voir que R est du même ordre de grandeur que ρ_0 pour toutes les valeurs de $\frac{q_1}{\tau}$, c'est à dire pour toutes les valeurs de ω, sauf pour les *très petites* valeurs de $\frac{q_1}{\tau}$.

Dans le 2[d] cas, ce qu'il dit est exact, car si ω est très grand, $\frac{q_1}{\tau}$ est très petit mais si $\frac{q_1}{\tau}$ est très petit l'emploi de la méthode n'a plus, comme nous l'avons dit, aucune raison d'être.

Il semble bien d'ailleurs que sa pensée doit être interprétée de la 1[ère] manière. Il sait trop bien le français pour avoir employé une expression impropre et le contexte semble plutôt favorable à cette interprétation.

Est-il vrai du moins que R ne peut jamais être *très grand* par rapport aux termes conservés de ρ? Oui, si l'on suppose x très petit, car alors nous avons

$$\rho = x_1 \cos v + x \cos f + x' \cos (f - 2v)$$

et nous avons donné l'expression du coefficient x'; c'est le dernier terme qui représente R. Si nous posons:

$$2v - f = f'$$

cette équation devient:

$$\rho = x_1 \cos v + x' \cos f' + x \cos (f' - 2v).$$

On retombe donc sur une expression de même forme, mais où le rôle des coefficients x et x' est interverti. On peut donc *indifféremment* prendre x ou x' pour le coefficient du terme principal, ou pour celui de R; si l'on *convient* de regarder toujours le plus grand des deux comme représentant le terme principal; on sera certain que R ne pourra devenir très grand.

Aurait-on la même liberté si x n'étant plus très petit, on devait tenir compte des puissances supérieures de x; on aurait alors des termes en $2f - 3v$, $2f - v$ etc. et si le coefficient de l'un de ces termes devenait très grand on ne pourrait plus employer le même artifice. Nous verrons plus loin que cela peut fort bien arriver.

Cause de l'Erreur de Gyldén.

Les conclusions de Gyldén, du Chapitre 1[er], § 1, N° 2, pages 10 à 17 sont donc fausses. Quelle est l'origine de son erreur?

Il envisage l'équation (1) et égale dans les deux membres les coefficients de $\cos f$ et $\cos v$. Si x est très petit, nous pouvons écrire:

$$\rho = x_1 \cos v + x \cos f + x' \cos (f - 2v).$$

Il vient alors dans ρ^3 des termes en

$$\text{(A)} \qquad \cos^2 v \cos f, \ \cos^3 f, \ \cos^2 (f - 2v) \cos f$$

et en

$$\text{(B)} \qquad \cos^2 v \cos (f - 2v),$$

qui peuvent donner un terme en $\cos f$.

Nous avons aussi dans ρ^3 des termes en

$$\text{(A')} \qquad \cos^3 v, \ \cos^2 f \cos v, \ \cos^2 (f - 2v) \cos v$$

et en

$$\text{(B')} \qquad \cos v \ \cos f \ \cos (f - 2v),$$

qui peuvent donner un terme en $\cos v$. GYLDÉN tient compte des termes (A) et (A'), mais ne tient pas compte des ternes (B) et (B') qui sont du même ordre.

Si x n'étant plus très petit, on ne pouvait plus négliger x^2, il y a bien d'autres termes dont il faudrait tenir compte.

L'introduction des termes négligés ferait perdre aux équations leur forme »horistique».

Dans le N° 3, GYLDÉN fait une tentative pour pousser l'approximation plus loin. Il arrive ainsi à des formules très compliquées d'où il ne tire rien; elles ne lui servent même pas à lui faire découvrir l'erreur commise dans le N° précédent. Il se borne à montrer que les résultats du N° 3 concordent approximativement avec ceux du N° 2, pourvu que la quantité qu'il appelle f page 25 soit très grande. Mais le cas où f est très grand est précisément celui où les vieilles méthodes classiques s'appliquent sans difficulté et où tout cet appareil est inutile.

Je n'ai pu arriver à déterminer quel est le but poursuivi dans le N° 4, et comme il n'est fait dans la suite aucune application des résultats qui y sont contenus, je m'abstiendrai d'en analyser ici le contenu.

Emploi des Fonctions Elliptiques.

Dans le § 2, GYLDÉN applique une seconde méthode, fondée sur l'emploi des fonctions elliptiques; nous allons voir qu'elle ne diffère pas de la méthode de DELAUNAY et qu'elle permet par conséquent d'obtenir correctement une première approximation. Nous verrons ensuite l'usage que GYLDÉN cherche en faire pour les approximations suivantes.

Posons

$$\rho = ge^{iv} + he^{-iv}; \ \gamma \cos v = \frac{\gamma}{2}(e^{iv} + e^{-iv}).$$

Substituons dans l'équation (1) et égalons dans les deux membres les coefficients de e^{iv} et e^{-iv}. Nous aurions aussi des termes en $e^{\pm 3iv}$, mais nous ne nous en occupons pas par ce qu'ils ne sauraient donner naissance à de petits diviseurs. Nous obtenons ainsi les deux équations.

$$(5) \qquad \begin{cases} g'' + 2ig' = \alpha g + 3\beta g^2 h - \dfrac{\gamma}{2} \\ h'' - 2ih' = \alpha h + 3\beta g h^2 - \dfrac{\gamma}{2} \end{cases}$$

où g', g'' désignent les dérivées successives de g par rapport à v.

Dans g et h nous ne conserverons que les termes à longue période qui seuls peuvent donner lieu à de petits diviseurs; mais alors nous pouvons négliger g'' et h'' devant g' et h', et il reste:

$$(6) \qquad \begin{cases} 2ig' = \alpha g + 3\beta g^2 h - \dfrac{\gamma}{2} \\ -2ih' = \alpha h + 3\beta g h^2 - \dfrac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

Multiplions par h', et g', ajoutons et intégrons, il viendra:

$$(7) \qquad \alpha gh + \frac{3}{2}\beta g^2 h^2 - \frac{\gamma}{2}(h + g) = \text{const.}$$

On peut ensuite achever l'intégration par les fonctions elliptiques. Telle est, aux notations près, la 2[de] méthode de GYLDÉN.

Comparons avec la méthode de DELAUNAY. Posons

$$F = \frac{1}{2}(\rho'^2 + \rho^2) - \frac{\alpha}{2}\rho^2 - \frac{\beta}{4}\rho^4 + \gamma\rho\cos v + u$$

ρ' désignant la dérivée de ρ par rapport à v, et u une variable auxiliaire.

L'équation (1) peut être remplacée par les équations canoniques

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = \dfrac{dF}{d\rho'} = \rho'; \; \dfrac{d\rho'}{dt} = -\dfrac{dF}{d\rho} = -(1-\alpha)\rho + \beta\rho^3 - \gamma\cos v \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dF}{du} = 1; \; \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{dF}{dv}. \end{cases}$$

Posons $\rho = \sqrt{2\xi}\cos\omega$, $\rho' = \sqrt{2\xi}\sin\omega$; d'où:

$$F = \xi + u - \alpha\xi\cos^2\omega - \beta\xi^2\cos^4\omega + \gamma\sqrt{2\xi}\cos v\cos\omega$$

les équations conserveront avec les variables ξ, ω; v, u la forme canonique. Si, conformément à la méthode de DELAUNAY, nous ne conservons que les termes à longue période; si par conséquent nous laissons de côté les termes en $\cos 2\omega$, $\cos 4\omega$, $\cos(v-\omega)$, il restera:

$$F = \xi + u - \frac{\alpha}{2}\xi - \frac{3}{8}\beta\xi^2 + \frac{1}{2}\gamma\sqrt{2\xi}\cos(v+\omega).$$

Soit

$$\omega + v = \varepsilon, \; u = \zeta - \xi$$

il viendra

$$(9)\qquad F = \zeta - \frac{\alpha}{2}\xi - \frac{3}{8}\beta\xi^2 + \frac{1}{2}\gamma\sqrt{2\xi}\cos\varepsilon$$

et les équations, devant rester canoniques, deviendront:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dF}{d\varepsilon} = -\gamma\frac{1}{2}\sqrt{2\xi}\sin\varepsilon; \; \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{dF}{d\xi} = +\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\beta\xi - \frac{\gamma\cos\varepsilon}{2\sqrt{2\xi}}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dF}{d\zeta} = 1; \; \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{dF}{dv} = 0.$$

Si nous posons:

$$g = \frac{1}{2}\sqrt{2\xi}e^{-i\varepsilon}, \; h = \frac{1}{2}\sqrt{2\xi}e^{i\varepsilon}$$

on retombera sur les équations (6) d'où il suit que la 2[de] méthode de GYLDÉN, étant identique à celle de DELAUNAY nous donne une 1[ère] approximation correcte.

On voit sans peine que g et h sont des fonctions doublement périodiques de v. On peut alors construire les équations correctes qui lient les quantités appelées plus haut x, x_1 et σ; ces équations sont transcendantes et elles n'ont par conséquent aucun rapport avec les équations (2). A ce point de vue les conclusions du § 2 sont en contradiction directe avec celles du § 1.

Dira-t-on au moins que les formules concordent quand x est très petit non seulement d'une façon absolue, mais par rapport à x_1. Nous allons voir que non, et l'Analyse que nous venons de donner dans le paragraphe 2 suffisait d'ailleurs pour que nous en fussions sûrs d'avance.

Nous allons développer g et h suivant les puissances de x, et écrire:

$$g = g_0 + g_1 + g_2 + \ldots, \qquad h = h_0 + h_1 + h_2 + \ldots$$

où h_n représente l'ensemble des termes de l'ordre de x^n. Nous trouvons d'abord:

$$g_0 = h_0 = \text{const.}; \qquad \alpha g_0 + 3\beta g_0^3 = \frac{\gamma}{2}$$

et ensuite:

$$(10) \qquad \begin{cases} 2ig_1' = (\alpha + 6\beta g_0^2)\, g_1 + 3\beta g_0^2 h_1 \\ -2ih_1' = (\alpha + 6\beta g_0^2)\, h_1 + 3\beta h_0^2 g_1. \end{cases}$$

Ce sont des équations linéaires à coefficients constants; nous pourrons y satisfaire en posant:

$$g_1 = x e^{-i\varsigma v}, \qquad h_1 = x' e^{-i\varsigma v}$$

ou bien

$$g_1 = x' e^{i\varsigma v}, \qquad h_1 = x e^{i\varsigma v}.$$

Ou bien encore en faisant la demi somme de ces deux solutions particulières; on obtient ainsi:

$$\rho = 2g_0 \cos v + x \cos f + x' \cos (f - 2v)$$

avec

$$f = (1 - \varsigma)\, v \qquad 2g_0 = x_1$$

et en substituant dans les équations (10), on trouve:

$$x(2\varsigma - \alpha - 6\beta g_0^2) = 3\beta g_0^2 x'$$

$$x'(-2\varsigma - \alpha - 6\beta g_0^2) = 3\beta g_0^2 x.$$

Mais $\alpha + 6\beta g_0^2$ c'est ce que nous avons appelé plus haut τ, et $3\beta g_0^2$, c'est ce que nous avons appelé $\frac{1}{2} q_1$; il vient ainsi:

$$x(2\varsigma - \tau) = \frac{1}{2} q_1 x'$$

$$x'(-2\varsigma - \tau) = \frac{1}{2} q_1 x$$

d'où:

$$4\varsigma^2 = \tau^2 - \frac{q_1^2}{4}$$

et

$$\frac{x'}{x} = \frac{\sqrt{2\tau - q_1} - \sqrt{2\tau + q_1}}{\sqrt{2\tau - q_1} + \sqrt{2\tau + q_1}}.$$

Ces formules sont en concordance avec les résultats du paragraphe 2 et en désaccord avec les équations (2), c'est à dire avec les équations de GYLDÉN.

Cherchons encore les termes constants de g_2 et h_2. Nous avons:

$$2ig_2' - (\alpha + 6\beta g_0^2) g_2 - 3\beta g_0^2 h_2 = 6\beta g_0 g_1 h_1 + 3\beta g_0 g_1^2$$

$$-2ih_2' - (\alpha + 6\beta g_0^2) g_2 - 3\beta g_0^2 h_2 = 6\beta g_0 g_1 h_1 + 3\beta g_0 h_1^2.$$

Nous cherchons seulement les parties constantes de g_2 et h_2; nous devons donc faire $g_2' = h_2' = 0$, $g_2 = h_2$, et remplacer $g_1 h_1$, g_1^2 et h_1^2 par leurs parties constantes. Or nous avons:

$$g_1 = \frac{x}{2} e^{-i\varsigma v} + \frac{x'}{2} e^{+i\varsigma v}$$

$$h_1 = \frac{x'}{2} e^{-i\varsigma v} + \frac{x}{2} e^{i\varsigma v}$$

d'où:

$$\text{partie constante } g_1^2 = \text{partie constante } h_1^2 = \frac{xx'}{2}$$

$$\text{partie constante } g_1 h_1 = \frac{x^2 + x'^2}{4}$$

d'où:

$$-(\alpha + 9\beta g_0^2) g_2 = \frac{3\beta g_0}{2}(x^2 + x'^2 + xx').$$

Or nous allons avoir; non plus $x_1 = 2g_0$ comme dans l'approximation précédente, mais:

$$x_1 = 2g_0 + 2g_2.$$

Comparons avec la seconde équation (2) qui peut s'écrire

$$-\alpha x_1 - \frac{3}{4}\beta x_1^3 - \frac{3}{2}\beta x_1(x^2 + x'^2) = -\gamma$$

en remarquant que x'^2 n'est pas autre chose que ce que Gyldén appelle (R^2). En première approximation, nous avons:

$$\alpha x_1 + \frac{3}{4}\beta x_1^3 = \gamma, \qquad x_1 = 2g_0.$$

Soit $x_1 = 2g_0 + 2\delta$, de sorte que δ devrait être égal à g_2. Cela fera en négligeant δ^2, δx^2, $\delta x'^2$

$$-(\alpha + 9\beta g_0^2)\delta = \frac{3}{2}\beta g_0(x^2 + x'^2)$$

on reconnaît déjà que la formule est erronée.

Discussion de la Méthode Précédente.

Jusqu'ici les conclusions du § 2, d'ailleurs contradictoires avec celles du § 1 sont correctes, mais Gyldén veut pousser plus loin l'approximation et tenir compte des termes négligés. Il écrit donc les équations (avec d'autres notations)

$$(11) \quad \begin{cases} 2ig' - \alpha g - 6\beta g^2 h + \frac{\gamma}{2} = M' \\ -2ih' - \alpha h - 6\beta h^2 g + \frac{\gamma}{2} = N' \end{cases}$$

où M' et N' représentent l'ensemble des termes d'abord négligés et il les intègre par approximations successives.

J'aurais à faire au sujet de ses conclusions la remarque suivante. Ayant résolu correctement les équations (6), il constate qu'elles conduisent dans certains cas à des solutions asymptotiques.

»Mais, ajoute-t-il page 67, nous verrons dans ce qui suit que la solution asymptotique n'appartient pas à notre problème; elle est due uniquement à la manière d'aborder les approximations...».

Il est évident qu'ici GYLDÉN se trompe. Les équations approximatives (6) admettent un système de solutions asymptotiques et par conséquent une solution périodique pour laquelle les exposants caractéristiques sont réels et différents de zéro. Si les équations approximatives admettent une solution périodique, il en sera de même des équations exactes, qui en diffèrent fort peu; car si l'on fait varier un système d'équations différentielles d'une manière continue, une solution périodique ne peut disparaître que quand l'un des exposants caractéristiques est nul, ce qui n'est pas le cas; de plus cette solution périodique aura encore des exposants caractéristiques réels, puisqu'ils différeront très peu de ceux qui correspondent aux équations (6); et l'existence des exposants caractéristiques réels entraîne celle des solutions asymptotiques. Tous ces points sont hors de doute et je les ai établis d'une façon très simple et rigoureuse dans mes méthodes nouvelles.

GYLDÉN cherche à nous donner la démonstration promise d'abord page 71, puis page 75; il cherche d'abord à montrer qu'on peut diriger les approximations de façon à ne plus rencontrer de solution asymptotique. Pour cela il écrit les équations (11) sous la forme suivante:

$$(11\text{ bis})\qquad \begin{cases} 2ig' - (\alpha + \varepsilon)g - 6\beta g^2 h + \dfrac{\gamma}{2} = M' - \varepsilon g \\ -2ih' - (\alpha + \varepsilon)h - 6\beta g h^2 + \dfrac{\gamma}{2} = N' - \varepsilon h \end{cases}$$

et il intègre par approximations successives en faisant d'abord les seconds membres égaux à zéro, remplaçant ensuite les inconnues dans les 2[ds] membres par les valeurs trouvées en 1[ère] approximation et ainsi de suite.

Il choisit ε de façon à éviter la solution asymptotique et il se flatte de pouvoir conduire les approximations suivantes en évitant l'introduction de cette solution et en aboutissant à une série convergente.

Pour juger cette prétention, il suffit de comparer à un exemple simple.

Soit:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + \beta\rho = \cos v.$$

Nous voyons que si $\beta = 1$, l'équation ne comporte plus de solution périodique et que v sort des signes trigonométriques. Croira-t-on que l'on peut échapper à cette conséquence par l'artifice suivant. Soit $\beta = 1$ et écrivons l'équation sous la forme:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 + \varepsilon)\rho = \cos v + \varepsilon\rho.$$

Nous trouvons en 1ère approximation $\rho = 0$, puis $\rho = \frac{\cos v}{\varepsilon}$, puis $\rho = \frac{2\cos v}{\varepsilon}$, puis $\rho = \frac{3\cos v}{\varepsilon}$, suite manifestement divergente.

Eh bien, GYLDÉN fait absolument la même chose. Il y a page 72 quelques lignes sur l'ordre de grandeur des quantités introduites. Ces lignes, trop concises pour être claires tendent évidemment à prouver que la série obtenue sera convergente, ou du moins que les termes iront en diminuant.

Or cela n'est pas exact; car si nous supposons $M' = N' = 0$, les équations (11 bis) se réduisent aux équations (6) et nous savons, GYLDÉN l'a démontré lui-même que ces équations admettent des solutions asymptotiques. La série en question est donc divergente, puisque si elle était convergente, ces solutions n'existeraient pas.

La série converge-t-elle dans d'autres cas? Les seconds membres de (11 bis) peuvent-ils être assez petits pour qu'il en soit ainsi? Cela n'a pas lieu, nous venons de le voir quand M' et N' sont nuls; cela ne pourrait donc être vrai que si M' et N' détruisaient les termes les plus importants de εg et de εh. Or il est évident qu'il ne peut pas en être ainsi *quels que soient* M' et N'. Eh bien, dans le raisonnement de GYLDÉN, il n'est fait aucune hypothèse sur M' et N' (ou ce qui revient au même sur ce qu'il appelle M *et* N). Son raisonnement est donc inexact.

GYLDÉN cherche ensuite à montrer que la solution asymptotique ne peut pas servir de point de départ à une véritable approximation (pages 75, 199) parce que le 2d terme du développement est susceptible de devenir infini.

C'est comme si l'on disait que quand α est petit $\sqrt{x}$ n'est pas une valeur approchée de $\sqrt{x+\alpha}$, sous prétexte que si l'on développe suivant les puissances de α, le 2[d] terme du développement est $\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sqrt{x}}$ et devient infini pour $x = 0$.

Dans le § 3, Gyldén applique une nouvelle méthode qui ne diffère de la précédente que par quelques complications nouvelles. Il néglige les termes M' et N' de sorte que les équations (11) se réduisent aux équations (6); nous venons de voir que ces équations s'intègrent très aisément par les fonctions elliptiques. Je n'ai pu arriver à comprendre pourquoi il aborde ainsi par une méthode approximative et compliquée un problème qu'il a lui-même résolu par une méthode rigoureuse et simple.

Il n'y a qu'un passage où il ne dit pas explicitement qu'il néglige M' et N', c'est celui de la page 93; mais on doit remarquer qu'il y regarde W comme une fonction périodique de l'argument *unique* w, ce qui ne peut s'expliquer que de deux manières; ou bien s'il néglige M' et N' comme dans le reste du §, ou bien s'il réduit M' et N' aux termes $-g''$ et $-h''$ qui sont négligés dans les équations (6). Dans ce dernier cas, on retomberait sur les équations (12) du paragraphe suivant, sur lesquelles nous reviendrons.

Nouvelle Méthode de Gyldén.

Dans le § 4, Gyldén emploie encore une nouvelle méthode, fondée également sur l'emploi des fonctions elliptiques. Elle consiste à développer la solution de l'équation (1) suivant les puissances de γ.

Si l'on appliquait cette méthode dans toute sa rigueur, on trouverait en 1[ère] approximation, c'est à dire pour $\gamma = 0$, que ρ est une fonction doublement périodique de v, développable suivant les sinus et les cosinus des multiples d'un argument unique $f = v + w$, fonction linéaire de v. Dans les approximations suivantes on trouverait des termes en

$$mv + nw$$

m et n étant des entiers quelconques.

Il s'introduirait aussi des termes séculaires où v sortirait des signes trigonométriques mais Gyldén évite l'introduction de ces termes séculaires par l'artifice suivant:

Il écrit l'équation (1) sous la forme:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 - \alpha')\rho - \beta\rho^2 = -\gamma\cos v + (\alpha - \alpha')\rho$$

α' étant une indéterminée. Dans le 2^d membre, il substitue à la place de ρ, d'abord zéro, puis à la 2de approximation la valeur de ρ trouvée en 1ère approximation et plus généralement à la n^e approximation, la valeur trouvée en $n - 1^e$ approximation. Il dispose ensuite de l'indéterminée α' à chaque approximation, de façon à faire disparaître les termes en cos f qui lui donneraient après intégration des termes séculaires. *Cet artifice est légitime.*

De plus, il laisse de côté à chaque approximation les termes en $mv + nw$ où l'entier m n'a pas la valeur ± 1. Ce qui justifie dans une certaine mesure cette manière de faire, c'est que les termes de la forme $v + nw$ sont ceux où s'introduit le plus important de tous les petits diviseurs; mais on ne doit pas oublier que d'autres termes, (qu'on ne rencontre pas il est vrai dans les 1ères approximations, mais seulement dans les suivantes) introduisent de nouveaux petits diviseurs encore plus petits, et que c'est précisément à ces petits diviseurs qu'est due la divergence des séries.

Opérer de la sorte, cela revient à déterminer g et h par les équations

$$(12) \qquad \begin{cases} g'' + 2ig' - \alpha g - 6\beta g^2 h + \frac{\gamma}{2} = 0 \\ h'' - 2ih' - \alpha h - 6\beta h^2 g + \frac{\gamma}{2} = 0. \end{cases}$$

Cette méthode se rapproche de celle de DELAUNAY; elle n'est pas plus précise; car les termes par lesquels les équations (12) diffèrent des équations (6) ne sont pas plus grands et plus importants que les autres termes négligés.

Il ne faudrait pas croire non plus que l'on obtient par ce procédé tous les termes en $v + nw$ avec leurs coefficients exacts. En effet, il peut s'introduire à la k^e approximation des termes de la forme $mv + nw$ ($m > 1$) dont la combinaison produira à la $k + p^e$ approximation un terme en $v + nw$; si l'on néglige ces termes à la k^e approximation, le coefficient du terme en $v + nw$ ne sera plus exact à la $k + p^e$.

Quoi qu'il en soit les équations (12) admettent l'intégrale:

$$g'h' - agh - \frac{3}{2}\beta g^2 h^2 + \frac{\gamma}{2}(h + g) = \text{const.}$$

On ne peut pas en trouver l'intégrale générale; mais pour l'objet poursuivi par GYLDÉN, il suffit d'en connaître une solution périodique. Cette solution périodique existe et le développement correspondant converge, comme il arrive toujours pour une solution périodique.

Les développements trouvés par GYLDÉN dans ce § 4 sont donc bien convergents, ainsi qu'il l'annonce. Ils pourraient être très facilement obtenus par la théorie des solutions périodiques. Mais dès qu'il voudrait tenir compte des termes en $mv + nw$, la convergence cesserait.

L'analyse de GYLDÉN ne nous apprend d'ailleurs rien de plus que la méthode de DELAUNAY. Elle n'est pas plus précise; elle n'est pas plus propre à nous renseigner sur la convergence des développements *complets*.

Analyse du Second Chapitre.

Passons au Chapitre II et au § 5; GYLDÉN y envisage des équations plus compliquées où figure dans le 1er membre outre la dérivée seconde $\frac{d^2y}{dv^2}$, un polynôme entier en y et $\frac{dy}{dv}$ dont les coefficients sont des fonctions connues de v. Quant au 2^d^ membre, c'est une fonction connue de v. Toutes ces fonctions connues de v sont supposées développables en séries trigonométriques.

GYLDÉN commence par étudier des transformations, permettant de simplifier cette équation. Je n'expliquerai pas ici le détail de ces transformations. Il arrive page 137 à l'équation suivante:

$$\frac{d^2y}{dv^2} + Y_1 y + Y_2 y^2 + Y_3 y^3 = \Omega$$

où Y_1, Y_2, Y_3, Ω sont des fonctions connues de v, *toutes très petites*; mais il n'énonce pas de résultats assez nets pour qu'on puisse les discuter.

A la page 142, il envisage une équation analogue, mais où Y_1 est très voisin de 1. La discussion des transformations qu'il lui applique nous

entraînerait trop loin, j'ai hâte d'arriver à ce qu'il dit page 158 d'une équation plus simple qui est son équation (39)

$$\frac{d^2z}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 \eta^2) z + \beta_0 \chi \eta^2 = \Omega$$

$$\eta^2 = (1 - \beta) z^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2$$

(Ω et χ donnés).

Il cherche à satisfaire à cette équation en posant:

$$z = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots$$

et en déterminant les V par une série d'équations qu'il appelle (47) page 170 et qui sont de la forme:

$$\frac{d^2V_n}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 H) V_n = \Omega_n$$

Ω_n étant connu et H étant la partie constante de η^2.

Laissant de côté, pour simplifier, β et χ, ainsi que β_1 et faisant $\beta_3 = -1$ pour fixer les idées, nous voyons que l'équation peut s'écrire

$$\frac{d^2z}{du^2} + z\left(1 + z^2 + \frac{dz^2}{du^2}\right) = \Omega. \tag{13}$$

Gyldén s'imagine qu'il obtiendra une 1ère approximation, en négligeant dans le coefficient de z les termes périodiques, de sorte que ce coefficient se réduise à une constante H et que l'équation (13) devienne:

$$\frac{d^2z}{du^2} + z(1 + H) = \Omega. \tag{13 bis}$$

Il est important d'examiner si cela est légitime, parce que c'est principe même de la méthode horistique.

Soit:

$$\Omega = \gamma \cos u + \gamma' \cos (u + \omega)$$

où $\omega = \sigma v$, σ étant petit.

L'équation (13 bis) nous conduirait alors à une solution de la fc

$$z = x \cos u + x' \cos (u + \omega)$$

et alors on aurait sensiblement (à cause de la petitesse de σ)

$$\eta^2 = z^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = x^2 + x'^2 + 2xx' \cos \omega$$

$$H = x^2 + x'^2.$$

Substituons dans les équations (13) et (13 bis). L'équation (13 bis) donne:

$$(14) \qquad \begin{cases} x(x^2 + x'^2) = \gamma \\ -x'(2\sigma + \sigma^2) + x'(x^2 + x'^2) = \gamma' \end{cases}$$

d'où GYLDÉN conclut que x et x' sont limités. Mais on néglige ainsi la différence entre les 1ères membres de (13) et (13 bis), c'est à dire:

$$2zxx' \cos \omega = x^2x' \cos(u + \omega) + x^2x' \cos(u - \omega) + x'^2x \cos u + x'^2x \cos(u + 2\omega).$$

Si σ est très petit, si γ et γ' sont comparables entre eux, x et x' sont du même ordre de grandeur, x^2x', x^3, etc. sont comparables à γ et les termes négligés sont de l'ordre de Ω, c'est à dire des termes conservés.

Du reste on montre cela d'un façon plus frappante en raisonnant comme il suit:

Faisons $\sigma = 0, \gamma = \gamma'$; les deux équations (14) ajoutées donnent

$$2x^3 = \gamma = 2x'^3 = \gamma'; \qquad (x + x')^3 = 4\gamma.$$

Mais si $\sigma = 0$, les deux termes de Ω se confondent en un seul et on a $\Omega = 2\gamma \cos u$, d'où par la 1ère équation (14) (qui est alors exacte):

$$(x + x')^3 = 2\gamma$$

résultat contradictoire avec le précédent.

L'analyse de GYLDÉN ne ressemble donc en rien à une approximation. Mais il faut se poser la question d'une façon plus large et se demander: Supposons que GYLDÉN n'ait pas commis cette erreur et qu'il ait calculé exactement ces coefficients x, ces coefficients auraient-ils été limités?

Soit plus généralement:

$$\Omega = \sum \gamma_n \cos f_n, \qquad f_n = u(1 + \sigma_n), \qquad \sigma_n = \varepsilon\lambda_n$$

$$z = \sum x_n \cos f_n, \qquad \mu_n = 2\lambda_n + \varepsilon\lambda_n^2.$$

Nous supposons les σ_n très petits, ε très petit, λ_n et μ_n finis.

Nous voyons d'abord que z est une fonction paire de u, de telle façon que pour $u = 0$ ses dérivées d'ordre impair s'annulent. Nous désignerons par y, y'', y^{IV}, etc. les valeurs de z et de ses dérivées successives d'ordre pair pour $u = 0$; et de même par Ω_0, Ω_0'' etc. les valeurs de Ω, et de ses dérivées pour $u = 0$. On trouve ainsi:

$$y'' + y + y^2 = \Omega_0$$

$$(y^{IV} + 2y'' + y) + (y + y'')y(y + 2y'') = \Omega_0 + \Omega_0''.$$

Or:

$$y = \Sigma x_n, \qquad \Omega_0 = \Sigma \gamma_n, \qquad y = y'' = -\varepsilon \Sigma x_n \mu_n$$

$$\Omega_0 + \Omega_0'' = -\varepsilon \Sigma \gamma_n \mu_n, \qquad y^{IV} + 2y'' + y = \varepsilon^2 \Sigma x_n \mu_n^2,$$

d'où:

$$-\varepsilon \Sigma x\mu + (\Sigma x)^2 = \Sigma \gamma$$

$$\varepsilon \Sigma x\mu^2 + \Sigma(x\mu)\Sigma x(\Sigma x + 2\varepsilon \Sigma x\mu) = -\Sigma \gamma\mu,$$

ou si ε est très petit:

$$(\Sigma x)^2 = \Sigma \gamma, \qquad \Sigma(x\mu)(\Sigma x)^2 = -\Sigma \gamma\mu,$$

ou enfin:

$$\Sigma x\mu = \frac{-\Sigma \gamma\mu}{(\Sigma \gamma)^{\frac{2}{3}}}.$$

Or si $\Sigma \gamma = 0$, cette expression devient infinie; il faut donc que l'un des x *au moins* devienne infini, (ou plutôt deux au moins, puisque $\Sigma x = 0$). *Les coefficients x ne sont donc pas limités.*

Ici encore la méthode horistique est en défaut.

Equations de la Longitude.

Jusqu'ici Gyldén a envisagé surtout les équations dont il se sert pour la détermination du rayon vecteur. Dans le § 6, il envisage plus particulièrement celles qui lui servent à déterminer la longitude. L'examen de la méthode horistique dans ce dernier cas est d'autant plus important qu'on a fait des tentatives pour l'appliquer, ce qu'on n'a jamais cherché à faire pour le rayon vecteur.

Un astronome tout à fait éminent, M. Backlund, trop confiant dans les résultats de Gyldén, s'est même un instant laissé entraîner à des conclusions inexactes qu'il a rectifiées depuis. M. Stockwell avait déterminé par les méthodes ordinaires certaines inégalités de la précession; M. Harzer avait calculé par les méthodes de Gyldén une inégalité de la longitude d'Hécube; j'intends par les premières méthodes de Gyldén et non par la méthode horistique. M. Backlund appliqua à ces deux cas les formules horistiques de Gyldén, et ces formules lui donnèrent des coefficients 3 ou 4 fois plus petits que ceux qu'avaient obtenus ses devanciers. (Bulletin de l'Académie de S:t Petersbourg, mai 1900).

Les équations de la longitude, de même que celles de la précession, peuvent être ramenées à la forme:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \Sigma a \sin(nt + v) + \Sigma b \sin pt$$

où $\sin(nt + v)$ est l'un des termes à courte période et où $\sin pt$ est l'un des termes à longue période. Pour plus de simplicité, je n'envisagerai qu'un terme de chaque sorte et j'écrirai.

$$(15) \qquad \frac{d^2v}{dt^2} = a \sin(nt + v) + b \sin pt.$$

Je supposerai que a et n sont petits, mais b et p beaucoup plus petits de sorte que $\frac{b}{p^2}$ soit beaucoup plus grand que $\frac{a}{n^2}$, et que p^2 soit comparable à $\frac{a^2}{n^2}$.

Posons alors:

$$(16) \qquad \frac{d^2v_0}{dt^2} = a \sin(nt + v_0),$$

et

$$v = v_0 + \varepsilon.$$

En négligeant le carré de ε, on trouve:

$$(17) \qquad \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = a\varepsilon \cos(nt + v_0) + b \sin pt.$$

Dans les anciennes méthodes (Stockwell et Harzer) on néglige le 1[er] terme qui est à courte période et on écrit

$$\varepsilon = -\frac{b}{p^2}\sin pt.$$

Voici maintenant ce que donne la méthode horistique appliquée par M. Backlund. On trouve sensiblement:

$$v_0 = -\frac{a}{n^2}\sin nt$$

d'où:

$$\cos(nt + v_0) = \cos nt + \frac{a}{n^2}\sin^2 nt.$$

L'équation (17) devient ainsi

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \varepsilon\left(a\cos nt + \frac{a^2}{n^2}\sin^2 nt\right) + b\sin pt$$

ou, *si l'on conserve seulement la valeur moyenne du coefficient de* ε:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{a^2}{2n^2}\varepsilon + b\sin pt$$

d'où:

$$\varepsilon = -\frac{b\sin pt}{\dfrac{a^2}{2n^2} + p^2}.$$

Telles sont les deux analyses entre lesquelles il s'agit de décider; cela est facile, puisque les équations (16) et (17) peuvent s'intégrer exactement et que Gyldén lui-même a souvent intégré des équations de même forme dans le cours de ses recherches.

Cette intégration montre que le terme en $\sin pt$ qui est le seul sensible est réduit à

$$\varepsilon = -\frac{b\sin pt}{p^2}$$

ce qui est conforme aux résultats obtenus par les anciennes méthodes (Cf Comptes Rendus tome 132, page 50).

Backlund revenant sur la question (Comptes Rendus, tome 132, page 291) découvrit le point faible de l'analyse qu'il avait d'abord suivie;

mais il voulut généreusement prendre la faute tout entière sur lui et disculper GYLDÉN; sa conduite dans cette circonstance montre que son caractère est digne de son talent.

»GYLDÉN, dit-il, considère dès le début des approximations l'équation:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = a\varepsilon\cos(nt+v_0) - \frac{1}{2}a\varepsilon^2\sin(nt+v_0) - \frac{1}{6}a\varepsilon^3\cos(nt+v_0) + b\sin pt \tag{18}$$

(c'est à dire qu'il néglige ε^4 et non ε^2) et il arrive pour le terme en $\sin pt$ à l'expression

$$-\frac{b\sin pt}{\nu^2+p^2}$$

où ν^2 est sans doute beaucoup plus petit que $\frac{a^2}{2n^2}$, mais n'est cependant pas nul.»

BACKLUND reconnu ensuite (Bulletin Astronomique, tome 19, page 433) que la même objection s'applique non seulement au cas de la précession, mais aussi au cas d'Hécube, et il ajouta qu'il serait très désirable qu'une analyse plus approfondie conduisît à la détermination de ν^2.

Ce qui résulte de l'analyse précédente, c'est à dire de l'intégration exacte de l'équation (17), c'est que ν^2 s'annule avec b. Voyons comment GYLDÉN traite notre équation (18), qui joue un rôle analogue à celui de son équation (12) de la page 189 (voir pages 189 à 199).

Par une série de transformations assez compliquées, il la ramène à la forme:

$$\frac{d^2y}{du^2} - 1024q^4h_2y - 96q^2\left(\frac{dy}{du}\right)^2 y = Y$$

Y représentant un ensemble de termes connus; c'est son équation (16) de la page 198. GYLDÉN réduit $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$ à sa valeur moyenne, qui est une constante positive, quitte à faire passer les termes négligés dans le 2[d] membre et à les confondre avec Y. Son équation prend alors la forme:

$$\frac{d^2y}{du^2} - \beta y = -Q \quad \text{(équation 17 de la page 198)}$$

où β est une constante *positive* et où Q est connu. C'est ce terme en βy qui permet d'éviter les petits diviseurs et qui joue le rôle de »terme horistique».

C'est toujours le même procédé qui consiste à remplacer une des fonctions qui figure dans nos équations pas sa valeur moyenne, et dont nous avons à plusieurs reprises reconnu l'illégitimité. Mais ici le terme en $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$ ne joue qu'un rôle secondaire, car $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$ est beaucoup plus petit que h_2. C'est donc le terme en $h_2 y$ qui est le principal *terme horistique;* comment s'est-il introduit dans les équations de Gyldén? Nous le voyons apparaître à la page 189.

»D'abord, dit Gyldén, nous en retranchons le terme dépendant de la partie constante de V_1^2, terme qui se réunit immédiatement avec la fonction Z_0.»

Voici ce que cela veut dire; reprenons notre équation (15), en posant comme nous l'avons fait, $v = v_0 + \varepsilon$, et négligeant ε^4, elle peut s'écrire:

$$\frac{d^2 v_0}{dt^2} + \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = a \sin(nt + v_0) + a\varepsilon \cos(nt + v_0) - \frac{1}{2} a\varepsilon^2 \sin(nt + v_0)$$
$$- \frac{1}{6} a\varepsilon^3 \cos(nt + v_0) + b \sin pt.$$

Nous avons vu comment cette équation peut se scinder en deux pour donner les équations (16) et (18); mais Gyldén ne fait pas tout à fait la même chose; il scinde l'équation de la façon suivante:

$$\text{(16 bis)} \qquad \frac{d^2 v_0}{dt^2} = a\left(1 - \frac{h}{2}\right) \sin(nt + v_0),$$

$$\text{(18 bis)} \qquad \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} - a\varepsilon \cos(nt + v_0) = -\frac{1}{2} a(\varepsilon^2 - h) \sin(nt + v_0)$$
$$- \frac{a\varepsilon^3}{6} \cos(nt + v_0) + b \sin pt$$

la constante h qui joue le rôle de h_2 étant la valeur moyenne de la fonction périodique ε^2.

L'équation (18 bis) ne diffère que par les notations de l'équation (12) de la page 189 de Gyldén. Dans cette équation (12) nous voyons la

constante h_2 figurer deux fois; à savoir dans le 2^d et le 3e termes. Cet h_2 qui figure dans le 3e terme, finit dans la suite des transformations par aller se perdre dans les termes connus Y; le »terme horistique» de l'équation (16) de Gyldén provient donc uniquement du second terme de l'équation (12), c'est à dire du terme en V_1. Les termes en $\varepsilon^2 - h$ et en ε^3, dans la suite de l'analyse de Gyldén, finissent par se confondre dans les termes connus Y.

Voici donc, en dernière analyse, en quoi consiste la méthode de Gyldén. En première approximation, on remplacera $\varepsilon^2 - h$ et ε^3 par zéro dans le 2^d membre de (18 bis) et on intégrera (16 bis) et (18 bis). Dans (16 bis) on donnera à h une valeur positive quelconque de l'ordre de ε^2. En 2de approximation, on remplacera dans le 2^d membre de (18 bis), $\varepsilon^2 - h$ et ε^3 par leur 1ère valeur approchée; quand à h on le remplacera dans (16 bis) par la valeur moyenne de la fonction périodique ε^2 obtenue en 1ère approximation et ainsi de suite.

Cette méthode serait légitime si le terme

$$-\frac{ah}{2}\sin(nt + v_0) \tag{19}$$

dont on tient compte était plus important que le terme

$$-\frac{a}{2}(\varepsilon^2 - h)\sin(nt + v_0) \tag{20}$$

que l'on néglige. Or le terme le plus important de ε est un terme en $\sin pt$, soit donc

$$\varepsilon = k\sin pt.$$

Le terme (19) dont on tient compte est

$$-\frac{ak^2}{4}\sin(nt + v_0).$$

Le terme (20) que l'on néglige est:

$$+\frac{ak^2}{8}\sin(nt + 2pt + v_0) + \frac{ak^2}{8}\sin(nt - 2pt + v_0).$$

Les coëfficients sont du même ordre, les arguments sont à peu près les mêmes puisque p est beaucoup plus petit que n; l'intégration ne peut in-

troduire de petit diviseur ni en ce qui concerne (19), ni en ce qui concerne (20). Il n'y a aucune raison pour tenir compte de l'un des termes plutôt que de l'autre.

L'analyse de GYLDÉN ne permet donc pas de trancher la question. Il s'agit de déterminer le coëfficient de $\sin pt$. D'après les anciennes théories il serait sensiblement

$$\frac{b}{p^2}.$$

D'après GYLDÉN il serait

$$\frac{b}{\nu^2 + p^2}$$

où ν serait lui-même de l'ordre de $\frac{b}{p^2}$. Il faut donc faire le calcul en considérant b et p comme très petits et de telle façon que $\frac{b}{p^2}$ soit fini; c'est à dire développer suivant les puissances de b et conserver seulement parmi les termes en b^n ceux qui contiennent p^{2n} au dénominateur, c'est précisément ce que l'on fait dans la méthode de DELAUNAY; si nous trouvons pour le coëfficient $\frac{b}{p^2}$, GYLDÉN aura tort, si nous trouvons une fonction de $\frac{b}{p^2}$ qui ne devient pas infinie avec $\frac{b}{p^2}$, GYLDÉN aura raison.

Appliquons donc la méthode de DELAUNAY; posons $\chi = nt + v$, de sorte que notre équation devient

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = a \sin \chi + b \sin pt.$$

Nous pouvons alors écrire, en introduisant une variable auxiliaire χ':

$$\frac{d\chi'}{dt} = a \sin \chi, \qquad \frac{d\chi}{dt} = \chi' - \frac{b}{p} \cos pt.$$

Posons (en introduisant deux nouvelles variables auxiliaires z et u)

$$F = \frac{1}{2}\chi'^2 - \frac{b}{p}\chi' \cos z + a \cos \chi + pu$$

nos équations prendront la forme canonique:

$$\frac{d\chi'}{dt} = -\frac{dF}{d\chi}; \qquad \frac{d\chi}{dt} = \frac{dF}{d\chi'}; \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dF}{du} = p; \qquad \frac{du}{dt} = -\frac{dF}{dz}.$$

Appliquons la méthode de JACOBI.

Soit une fonction S de la variable χ et du paramètre W définie par l'équation:

$$\left(\frac{dS}{d\chi}\right)^2 = 2[\varphi(W) - a\cos\chi].$$

Posons ensuite:

$$\chi' = \frac{dS}{d\chi}, \qquad \frac{dS}{dW} = w = \int \frac{\varphi'(W)d\chi}{\sqrt{2(\varphi - a\cos\chi)}}.$$

Nous voyons:

1° que

$$\frac{\chi'^2}{2} - a\cos\chi = \varphi(W)$$

2° que

$$\chi' d\chi - W dw$$

est une différentielle exacte.

3° que χ', $\cos\chi$ et $\sin\chi$ sont des fonctions doublement périodiques de w; nous pouvons choisir la fonction $\varphi(W)$ de façon que la période réelle soit 2π, et que χ', $\cos\chi$ et $\sin\chi$ soient développables suivant les sinus et les cosinus des multiples de w.

Il vient alors:

$$F = \varphi(W) + pu - \frac{b}{p}\chi'\cos z$$

et les équations conservant la forme canonique s'écrivent:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dF}{dw}; \qquad \frac{dw}{dt} = -\frac{dF}{dW}, \qquad \frac{dz}{dt} = p.$$

La fonction F est développable suivant les cosinus et les sinus des multiples de w et de z. Pour appliquer la méthode de DELAUNAY, il faut ne conserver dans F que les termes »à longue période» c'est à dire ici ceux qui ne dépendent pas de w, mais seulement de z. Pour cela nous n'avons qu'à réduire χ' à sa valeur moyenne qui est une fonction de W que j'appelle χ'_0, de sorte que

$$F = \varphi(W) + pu - \frac{b}{p}\chi'_0\cos z$$

d'où:

$$\frac{dW}{dt} = 0, \qquad \frac{dw}{dt} = -\varphi'(W) + \frac{b}{p}\frac{d\chi_0'}{dW}\cos z, \qquad \frac{dz}{dt} = p$$

d'où:

$$W = \text{const.}, \qquad z = pt, \qquad w = -t\varphi'(W) + \frac{b}{p^2}\frac{d\chi_0'}{dW}\sin pt.$$

On voit que w contient un terme en

$$\frac{b}{p^2}\sin pt$$

qui devient très grand si $\frac{b}{p^2}$ est très grand; or χ, d'après nos hypothèses est une fonction de w qui augmente de 2π quand w augmente de 2π. S'il y a dans w un terme périodique d'amplitude très grande, il y en aura également un dans χ.

Le phénomène »horistique» ne peut donc se produire comme l'avait cru Gyldén.

9. *Examen d'une équation particulière.*

Passons maintenant à la page 208; nous y trouverons l'équation

$$\text{(21)} \qquad \frac{d^2y}{du^2} + \mu y\frac{dy}{du} = -a\sin\sigma u$$

Gyldén cherche une solution périodique de cette équation de la forme:

$$y = \Sigma x_n \sin n\sigma u$$

n étant entier positif; on prend plaisir à se trouver en présence d'une problème aussi simple et aussi nettement posé.

Gyldén cherche à déterminer les coëfficients x_n et il arrive à la fin de la page 209 à une équation qu'il cherche à discuter.

»Maintenant, dit-il, en supposant les coëfficients $x_3, x_4, \ldots$, ou connus, ou négligeables, il se comprend que la quantité x_1, qui s'obtient par la résolution de l'équation précédente du 3e degré, ne surpasse jamais une certaine limite qui s'approche d'autant plus de zéro, que la valeur de $\frac{16a}{\mu^2}$ est plus petite.

On aura facilement des résultats semblables relativement aux coëfficients x_2, x_3, ...»

Pour juger ce résultat, développons les deux membres de (21) suivant les puissances de u, et égalons les coëfficients de u, il viendra:

$$\sigma^2[-\Sigma xn^2 + \mu(\Sigma xn)^2] = -a\sigma$$

d'où:

$$\Sigma|x|n^2 + \mu(\Sigma|x|n)^2 > \left|\frac{a}{\sigma}\right|. \tag{22}$$

Si σ est très petit, le second membre de cette inégalité est très grand, d'où il suit que les x ne peuvent pas être tous limités.

Dira-t-on que la série Σx est convergente, mais que la série Σxn^2 diverge, de sorte que le 1er membre de l'inégalité peut être très grand, bien que tous les x soient limités?

Non, car tant que la solution périodique existe, y est une fonction analytique de u, ses dérivées d'ordre quelconque sont des fonctions périodiques de u et sont comme elle développable en série de FOURIER. La série

$$\Sigma|x|n^p$$

est donc convergente quelque grand que soit p. Soit γ la plus grande des valeurs de $n^4|x|$, l'inégalité (22) nous donnera:

$$\gamma\sum\frac{1}{n^2} + \mu\gamma^2\left(\sum\frac{1}{n^3}\right)^2 > \left|\frac{a}{\sigma}\right|$$

ce qui montre que γ croît indéfiniment avec $\left|\frac{a}{\sigma}\right|$.

D'ailleurs si comme le dit GYLDÉN, x_3, x_4, ... étaient »négligeables», le 1er membre de (22) ne dépendrait plus que de x_1 et x_2 et ne contiendrait plus qu'un nombre fini de termes. Il serait donc impossible que x_1 et x_2 soient tous deux limités.

Enfin montrons plus directement encore que y ne peut être limité. Soit M le maximum de $|y|$. Intégrons l'équation (21) sous la forme:

$$\frac{dy}{du} - \frac{u}{2}y^2 = \frac{a}{\sigma}\cos\sigma u + C.$$

Égalons dans les deux membres les coëfficients de $\cos\sigma u$; dans $\frac{dy}{du}$ il est plus petit que $\pi\sigma M$, dans y^2 plus petit que πM^2; nous aurons donc:

$$\pi\sigma M + \pi M^2 \frac{\mu}{2} > \left|\frac{a}{\sigma}\right|$$

ce qui montre que M croît indéfiniment avec $\frac{a}{\sigma}$.

10. *Équations du rayon vecteur.*

J'arrive au § 7 page 227. Nous y retrouvons l'équation (1), avec cette différence que le 2^d membre au lieu de se réduire à un seul terme en comprend plusieurs de même forme, dont je désignerai l'ensemble par X. Nous avons donc

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1-\alpha)\rho - \beta\rho^3 = X \tag{23}$$

Gyldén écrit ici z au lieu de ρ; β_3 au lieu de β, et Z au lieu de $1-\alpha$; mais dans toute la 1^ière partie de son analyse, il suppose Z constant et voisin de 1.

Nous aurons d'ailleurs:

$$X = -\Sigma A_n \cos G_n, \qquad G_n = 2\lambda_n v.$$

Gyldén, page 229 introduit deux variables nouvelles y et ψ et pose:

$$\rho = \frac{y}{1+\psi}.$$

Alors l'équation (23) est remplacée par les deux équations suivantes (équations (3) et (4) de Gyldén)

$$\frac{d^2\psi}{dv^2} = (1+\psi)\nu^2 - \beta\frac{y^2}{1+\psi}, \tag{24}$$

$$\frac{d^2y}{dv^2} + (1-\alpha-\nu^2)y = (1+\psi)X + 2\frac{d\psi}{dv}\frac{dy}{dv} + Y \tag{25}$$

où Y désigne un ensemble de termes inutiles à écrire.

Quant à ν^2 c'est une constante choisie de telle façon que ψ soit une série trigonométrique dont la partie constante est nulle.

L'équation (24) peut être remplacée par la suivante: (équation (3') de GYLDÉN):

$$\frac{d^2\psi}{dv^2} - 2\nu^2\psi = U \tag{24 bis}$$

U étant un ensemble de termes inutiles à écrire.

Voici alors comment GYLDÉN conduit les approximations. Il fait d'abord $\psi = 0$ dans les seconds membres de (25) et (24 bis) et il détermine à l'aide de ces deux équations y, ψ et ν^2; il substitue ensuite ces valeurs des inconnues dans les 2^{ds} membres, ce qui lui fournit des valeurs plus approchées de ces mêmes inconnues et ainsi de suite.

En 1^{ière} approximation, il trouve:

$$y = \Sigma x_n \cos G_n, \qquad \nu^2 = \frac{1}{2}\beta\Sigma x^2, \qquad x_n = \frac{A_n}{4\lambda_n^2 + \alpha - 1 + \nu^2}$$

et il a aussi page 230 une expression de ψ que je ne transcris pas.

Commençons par comparer avec les résultats du chapitre 1er. Dans ce chapitre, le 2^{d} membre X se réduisait à un seul terme $-\gamma \cos v$; et GYLDÉN s'efforçait d'obtenir l'intégrale générale dépendant d'une constante arbitraire appelée x. Il obtenait ainsi l'équation (2) qui nous l'avons vu est fausse en général; mais quand il se bornait à chercher l'intégrale particulière qui correspond au cas de $x = 0$, son équation se réduisait à

$$\frac{3}{4}\beta x_1^3 + \alpha x_1 - \gamma = 0 \tag{3}$$

qui est exacte.

Dans le chapitre que nous citons maintenant, GYLDÉN ne cherche plus l'intégrale générale, mais seulement l'intégrale particulière dont il vient d'être question. Donc, quand X se réduit à un seul terme, il devrait retrouver l'équation (3) à la différence des notations près.

Soit donc

$$X = -A_1 \cos G_1 = -\gamma \cos v$$

c'est à dire:

$$A_1 = \gamma, \qquad 2\lambda_1 = 1.$$

Les formules de la page 230 donnent alors

$$y = x_1 \cos G_1, \qquad x_1 = \frac{A_1}{\alpha + \nu^2}, \qquad \nu^2 = \frac{1}{2}\beta x_1^2, \qquad \psi = \frac{\beta x_1^2}{8 + 4\nu^2} \cos 2G_1.$$

Observons que d'après l'équation (3) si α et γ sont très petits et β fini, x_1 est de l'ordre de $\sqrt[3]{\gamma}$ et par conséquent petit; donc x_1^2 et par conséquent ψ sont négligeables devant l'unité. On a donc:

$$\rho = y = x_1 \cos v$$

et

$$\nu^2 x_1 + \alpha x_1 - A_1 = 0$$

ou:

$$\frac{1}{2}\beta x_1^3 + \alpha x_1 - \gamma = 0.$$

C'est bien une équation de la forme (3); mais elle est incompatible avec l'équation (3) puisque les coëfficients sont différents.

La méthode de Gyldén est donc non-seulement illégitime, mais encore en contradiction avec l'un des rares résultats exacts qu'il avait obtenus antérieurement.

D'où provient cette divergence? Pour que la méthode d'approximation fussent légitimes, il faudrait que les termes négligés fussent plus petits que les termes conservés. Or il n'en est rien, il est aisé de constater que dans le 2[d] membre de (25) le terme $2\frac{d\psi}{dv}\frac{dy}{dv}$ que l'on néglige est du même ordre que le terme X que l'on conserve. Et cela est vrai, bien entendu, que X se réduise à un seul terme, ou en contienne plusieurs (cf. Comptes Rendus, tome 138, page 933).

11. *Analyse du troisième chapitre.*

Enfin dans le chapitre III, Gyldén cherche à appliquer aux problème des 3 corps les principes établis dans les deux premiers chapitres; comme nous avons vu que ces principes sont faux, il paraît superflu d'en discuter les applications. Un mot seulement sur la conclusion la plus importante. Les termes les moins élevés de la fonction perturbatrice peuvent donner

lieu au phénomène connu sous le nom de libration; mais il n'en est pas de même des termes d'ordre élevé; pour, ceux-ci en effet, les termes horistiques prennent une influence prépondérante et s'opposent à la libration.

La fausseté de cette conclusion est manifeste. J'ai établi en effet par des démonstrations rigoureuses dans les *Méthodes Nouvelles:*

1° Qu'à chaque terme de la fonction perturbatrice, quelque élevé qu'en soit l'ordre correspond un système de solutions périodiques de la 2e ou de la 3e sortes; ces solutions sont développables suivant les puissances des masses et les séries convergent pourvu que les masses soient assez petites. (Chapitre III.)

2° Que parmi ces solutions périodiques il y en a autant de stables que d'instables; que les solutions très voisines d'une solution périodique stable, oscillent autour de cette solution périodique, ce qui donne lieu à la libration; que par conséquent un terme quelconque de la fonction perturbatrice engendrera une libration, à moins que les exposants caractéristiques correspondants ne soient tous nuls. (Chapitre IV.)

3° Que d'autre part on ne saurait prétendre que pour les termes d'ordre suffisamment élevé, ces exposants sont nuls. Il suffit pour s'en convaincre de former les expressions approchées des termes d'ordre élevé de la fonction perturbatrice par la méthode de Darboux. (Chapitre VI, en particulier n° 102.)

La conclusion de Gyldén est donc fausse; où s'est-il trompé? Je ne puis le dire exactement; il s'appuie sur ce qu'un certain coëfficient a est négatif pour les termes élevés page 292; d'ou tire-t-il cette affirmation; il m'a été impossible de le découvrir; il la déduit sans doute de quelque proposition antérieure qu'il néglige de rappeler. Quelle est cette proposition, est-ce une de celles dont nous avons reconnu plus haut la fausseté; est-ce une autre qui m'a échappé et qui serait alors également fausse, puisqu'elle conduit à une conclusion inexacte? Je ne puis le savoir.

En résumé de tout ce grand effort, il ne reste rien.

Quelques-uns des résultats sont manifestement exacts, mais on aurait pu y arriver par une voie beaucoup plus rapide; un plus grand nombre sont manifestement faux; la plupart sont énoncés d'une façon trop obscure pour qu'on puisse décider s'ils sont vrais ou faux.

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DES RIEMANN'SCHEN PROBLEMS IN DER THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

T. BRODÉN

in LUND.

Bekanntlich rührt von RIEMANN eine Aufgabe her, welche in folgender Weise formulirt werden kann: Es seien in der Ebene einer Variabeln x σ von $x = \infty$ verschiedene Stellen

$$e_1, e_2, \ldots, e_\sigma$$

gegeben, und andererseits σ lineare homogene Substitutionen in n Veränderlichen,

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_\sigma;$$

dann sollen n monogene Functionen von x

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

bestimmt werden, welche beim Überschreiten, in positiver Richtung, von σ die x-Ebene zerschneidenden Schnitten $(e_1\infty), (e_2\infty), \ldots, e_\sigma\infty)$ bez. die Substitutionen $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_\sigma$ erleiden, sonst aber im endlichen durchgehends holomorph sind, während überdies die Stellen $e_1, \ldots, e_\sigma$, sowie auch $e_{\sigma+1} = \infty$ den »Charakter der Bestimmtheit» aufweisen.[1]

[1] RIEMANN, *Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten* (Nachlass), Ges. Werke, Leipzig 1876, p. 357—69. Man sehe auch SCHLESINGER, *Handbuch der Theorie der lin. Differentialgl.* II, 1, p. 109; II, 2, p. 382 ff.; und *Zur Theorie der lin. Differentialgl. im Anschluss an das Riemann'sche Problem*, Journ. für Math., Bd. 123, p. 138 ff. — Vergl. auch KLEIN, Math. Ann. 46, p. 83.

Diese Aufgabe ist im wesentlichen mit der folgenden gleichbedeutend: es soll eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung der FUCHS'-schen Klasse bestimmt werden, für welche einerseits die im endlichen liegenden Verzweigungsstellen, andererseits die Monodromiegruppe vorgeschrieben sind.[1]

Hieran knüpft sich zunächst die Frage nach der *Existenz* von Functionen (bez. Differentialgleichungen) der verlangten Art. Diese Existenzfrage ist bisher nur unter einer sehr wesentlichen Specialisirung in strenger Weise entschieden worden, indem Herr L. SCHLESINGER zeigte, dass dieselbe zu bejahen ist, wenn die von ihm sogenannten »Convergenzbedingungen» erfüllt sind.[2]

Im folgenden wird nicht diese RIEMANN'sche Frage in unveränderten Form behandelt, sondern eine etwas allgemeinere, in welcher weniger verlangt wird: *der »Charakter der Bestimmtheit» an den Stellen e_i wird nicht länger gefordert.*

Die zugehörige zu bestimmende lineare Differentialgleichung hat dann *eindeutige*, im allgemeinen aber nicht rationale Coefficienten.

Die Frage nach der Lösbarkeit der hiermit angegebenen Aufgabe wird im folgenden *auf den Fall* $n = 2$ *zurückgeführt.* Oder eigentlich noch mehr: es wird gezeigt, dass die Existenzfrage in ihrer vollen Allgemeinheit zu bejahen ist, falls für $n = 2$ gewisse im wesentlichen nur durch Ungleichheiten charakterisirte Voraussetzungen überhaupt mit der Existenz von 2 Functionen der verlangten Art verträglich sind. Und der Beweis hierfür wird so geführt, dass für die n Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gewisse analytische Ausdrücke hervorgehen, welche die postulirten, auf den Fall $n = 2$ sich beziehenden Functionen enthalten. Diese Ausdrücke sind Quotienten, deren Zähler als Modificationen der POINCARÉ'schen ξ-Reihen bezeichnet werden können.[3]

Hierbei sei noch daran erinnert, dass wenn man in der genannten Weise — oder in irgend einer Weise — n Functionen $y_1 \ldots y_n$ bestimmt

---

[1] Vgl. HILBERT, *Mathematische Probleme* (Pariser Vortrag), Sep.-Abzug aus den Gött. Nachr., p. 37, Archiv d. Math. u. Phys. (3), I.

[2] S. die citirten Stellen.

[3] Eine vorläufige Mittheilung über diese Untersuchung erschien in Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förhandl., Stockholm 1902, p. 5—11. Das Problem wurde hier, der Einfachheit wegen, in unwesentlich verschiedener Form genommen.

hat, welche die geforderten Verzweigungsverhältnisse haben (die gegebenen Verzweigungsstellen $e_1 \dots e_\sigma$ mit den zugehörigen gegebenen linearen Substitutionen), dadurch auch *alle* Systeme $z_1 \dots z_n$ mit denselben Verzweigungsverhältnissen — alle »cogredienten» Systeme — bestimmt sind, indem alle solchen Systeme in der Form

$$z_i = r_{i0}y_i + r_{i1}y_i' + r_{i2}y_i'' + \dots + r_{i,n-1}y_i^{(n-1)} \qquad (i=1,\dots,n)$$

enthalten sind, wo die r_{ik} eindeutige Functionen von x bedeuten.[1] Falls Systeme $z_1 \dots z_n$ existiren, welche den RIEMANN'schen Forderungen genügen, sind sie also auch in dieser Form enthalten.

Wir müssen mit gewissen Hilfsbetrachtungen beginnen.[2]

Für σ *hyperbolische* lineare Substitutionen

$$\frac{z' - h_i}{z' - k_i} = p_i^2 \frac{z - h_i}{z - k_i}, \qquad (i=1,2,\dots,\sigma)$$

kurz

$$B_1, B_2, \dots, B_\sigma,$$

seien die 2σ Fixpunkte h_i, k_i vorgeschrieben und durchaus von einander getrennt; dagegen die Multiplicatoren p_i^2 vorläufig unbestimmt; nur setzen wir fest, dass sie alle > 1 angenommen werden sollen (so dass also die unendlich oft wiederholte Anwendung der Substitution B_i bez. der inversen B_i^{-1} auf die Stelle k_i bez. h_i als Grenzstelle führt). Die zu B_i gehörenden Niveaulinien sind (unabhängig von p_i) die Orthogonaltrajectorien (Kreise) des durch h_i und k_i bestimmten Kreisbüschels. Man denke sich für jede Substitution B_i einen zugehörigen Niveaukreis H_i gezeichnet, welcher die Stelle h_i einschliesst (und also k_i ausschliesst). Diese σ Kreise seien ferner so klein gewählt, dass sie einander vollständig ausschliessen (und auch nicht äusserlich berühren), was möglich ist, da die σ Punkte h_i nach unserer

---

[1] S. etwa SCHLESINGER, *Handbuch etc.* II, 1, p. 112—13.

[2] Ähnliche Betrachtungen habe ich bei BURNSIDE gefunden, in einer Abhandlung wo er die Convergenz der POINCARÉ'schen Thetareihen zum Falle $m = 1$ [Reihen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension] auszudehnen sucht, Proceedings of the London Math. Soc., Vol. 23, p. 55 ff. Mit Recht, scheint es, wird diese Stelle der (nicht überall ganz correcten) BURNSIDE'schen Arbeit in der neulich erschienenen Lieferung (II, 1) des FRICKE-KLEIN'schen Werkes über automorphe Functionen als interessant bezeichnet (p. 166); vgl. unten.

Annahme vollständig getrennt liegen. Bei Ausübung der Substitution B_i geht H_i in einen anderen Niveaukreis K_i über, welcher mit p_i veränderlich ist, aber für hinreichend grosse p_i-Werthe [wir denken uns $p_i > 0$] die Stelle k_i einschliesst und beliebig kleinen Radius erhält. Es ist daher möglich, eine positive Grösse P so zu bestimmen, dass sobald alle $p_i > P$ sind, die Kreise K_i einander ausschliessen, sowie auch die H_i ausschliessen. Man ertheile jetzt den p_i bestimmte Werthe, welche dieser Bedingung genügen. Dann liegen also 2σ einander ausschliessende Kreise vor, welche durch die Substitutionen B_i paarweise auf einander bezogen sind. Die *Substitutionsgruppe* Γ, welche durch $B_1 \ldots B_\sigma$ als Fundamentalsubstitutionen bestimmt wird, ist mit Sicherheit in der z-Ebene *eigentlich discontinuirlich*, und es kann für dieselbe der von sämmtlichen Kreisen H_i und K_i ausgeschlossene Theil R_0 der Ebene als Discontinuitätsbereich (Fundamentalbereich) gelten.[1] Ein beliebiger Punkt von R_0 geht bei der Substitution B_i bez. B_i^{-1} in einen inneren Punkt von K_i bez. H_i über (aber natürlich nicht immer umgekehrt). Es können ferner unter den Substitutionen B_i keine Fundamentalrelationen bestehen.[2] Es lässt sich daher, von »identischen Umformungen»[3] abgesehen, jede Substitution V_ν der Gruppe nur in einer Weise in der Form

$$(1) \qquad V_\nu \equiv B_{i_n}^{\lambda_n} B_{i_{n-1}}^{\lambda_{n-1}} \ldots B_{i_2}^{\lambda_2} B_{i_1}^{\lambda_1}$$

darstellen, wo $i_1 \ldots i_n$ ganze positive Zahlen $\leq \sigma$ sind, $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ ganze Zahlen $\gtrless 0$. Oder m. a. W.: jeder Gruppensubstitution (welche von der Identität verschieden ist) entspricht ein symbolisches Produkt (1) mit unzweideutig bestimmten Werthen von n, $i_1 \ldots i_n$, $\lambda_1 \ldots \lambda_n$, wenn man feststellt, dass niemals $i_{\rho+1} = i_\rho$ sein darf. Und umgekehrt stellt jedes Produkt der Form (1), welches dieser Bedingung genügt, eine von der Identität verschiedene Gruppensubstitution dar. Bekanntlich wird unter solchen Umständen die

---

[1] Man sehe etwa FRICKE-KLEIN, *Autom. Funct.* I, p. 190—92; oder SCHLESINGER, *Handbuch etc.* II, 2, p. 240.

[2] S. z. B. FRICKE-KLEIN, l. c. I, p. 174.

[3] Dieser Ausdruck wird in KLEIN-FRICKE *Modulfunctionen* benutzt und erklärt, (I, p. 452).

unzweideutig bestimmte Summe $\sum_1^n |\lambda_k|$ als **Index** der fraglichen Substitution V_ν bezeichnet, $\sum |\lambda_k| = \text{Ind. } V_\nu$.[1]

Es gilt nun auch folgender Satz, den wir für unseren jetztigen Zweck als Hülfssatz benutzen werden:

Hülfssatz. *Über die 2σ gegebenen, von einander getrennten Fixpunkte* h_i, k_i *sei angenommen, dass keiner mit dem Nullpunkte* ($z = 0$) *zusammenfällt* [oder unendlich entfernt ist, was schon oben vorausgesetzt wurde]. *Wenn dann* q *eine beliebig grosse positive Zahl bedeutet, so lässt sich eine andere positive Grösse* P *so bestimmen, dass sobald jedes* $p_i > P$ *ist, die vier Coëfficienten einer jeden von der Identität verschiedenen Substitutionen*

$$V_\nu \equiv \left\{ z', \frac{a_\nu z + b_\nu}{c_\nu z + d_\nu} \right\}$$

der Gruppe Γ *dem absoluten Betrage nach je grösser sind als*

$$q^{\text{Ind } V_\nu},$$

wenn die Substitution in unimodularer Form geschrieben ist ($a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu = 1$).[2]

Der Beweis dieses Satzes lässt sich folgendermassen führen. Jede beliebige λ^{te} Potenz ($\lambda \gtrless 0$) einer Fundamentalsubstitution B_i lässt sich in unimodularer Form folgendermassen schreiben:

$$(2) \qquad B_i^\lambda \equiv \left\{ z', \frac{\dfrac{k_i p_i^\lambda - h_i p_i^{-\lambda}}{h_i - k_i} z - \dfrac{h_i k_i (p_i^\lambda - p_i^{-\lambda})}{h_i - k_i}}{\dfrac{p_i^\lambda - p_i^{-\lambda}}{h_i - k_i} z - \dfrac{h_i p_i^\lambda - k_i p_i^{-\lambda}}{h_i - k_i}} \right\}.$$

Dies gesetzt, betrachte man irgend eine bestimmte Substitution V_ν und bezeichne für den Augenblick mit f_1, g_1, l_1, m_1; f_2, g_2, l_2, m_2; f_3, g_3, l_3, m_3 etc. die Coefficienten der nach der Productdarstellung (1) in V_ν eingehenden Substitutionen

$$B_{i_1}^{\lambda_1}, \; B_{i_2}^{\lambda_2} B_{i_1}^{\lambda_1}, \; B_{i_3}^{\lambda_3} B_{i_2}^{\lambda_2} B_{i_1}^{\lambda_1} \text{ etc.},$$

---

[1] Vgl. SCHLESINGER, *Handbuch etc.* II, 2, p. 270, 350.

[2] Der Satz kommt nicht in dieser Form bei BURNSIDE vor. Auch fehlt bei ihm die Bedingung, dass die h_i und k_i von Null verschieden sein sollen.

wobei für diese n Substitutionen (von denen die letzte mit V_ν zusammenfällt) unimodulare Form vorausgesetzt wird. Von einer erlaubten Zeichenänderung abgesehen, gelten dann, für $\rho = 1, 2, \ldots, n-1$, die Relationen

$$f_{\rho+1} = \alpha^{(\rho+1)} f_\rho + \beta^{(\rho+1)} l_\rho, \qquad g_{\rho+1} = \alpha^{(\rho+1)} g_\rho + \beta^{(\rho+1)} m_\rho,$$

$$l_{\rho+1} = \gamma^{(\rho+1)} f_\rho + \delta^{(\rho+1)} l_\rho, \qquad m_{\rho+1} = \gamma^{(\rho+1)} g_\rho + \delta^{(\rho+1)} m_\rho,$$

wo für den Augenblick $\alpha^{(\rho+1)}, \beta^{(\rho+1)}, \gamma^{(\rho+1)}, \delta^{(\rho+1)}$ die Coefficienten der in der Form (2) geschriebenen Substitution $B_{i_{\rho+1}}^{\lambda_{\rho+1}}$ bedeuten. Demgemäss wird

$$(3) \quad \begin{cases} l_{\rho+1} = l_\rho \cdot \dfrac{1}{h_{i_{\rho+1}} - k_{i_{\rho+1}}} \left\{ p_{i_{\rho+1}}^{\lambda_{\rho+1}} \left(\dfrac{f_\rho}{l_\rho} - h_{i_{\rho+1}} \right) - p_{i_{\rho+1}}^{-\lambda_{\rho+1}} \left(\dfrac{f_\rho}{l_\rho} - k_{i_{\rho+1}} \right) \right\}, \\ m_{\rho+1} = m_\rho \cdot \dfrac{1}{h_{i_{\rho+1}} - k_{i_{\rho+1}}} \left\{ p_{i_{\rho+1}}^{\lambda_{\rho+1}} \left(\dfrac{g_\rho}{m_\rho} - h_{i_{\rho+1}} \right) - p_{i_{\rho+1}}^{-\lambda_{\rho+1}} \left(\dfrac{g_\rho}{m_\rho} - k_{i_{\rho+1}} \right) \right\} \end{cases}$$

(und auf $f_{\rho+1} : f_\rho$, $g_{\rho+1} : g_\rho$ beziehen sich zwei ähnliche, aber nicht ganz so einfache Relationen, welche wir nicht benutzen werden).

Die Stellen $f_\rho : l_\rho$ liegen nothwendig innerhalb eines Kreises H_i oder K_i. Sie sind nämlich Bildpunkte der in R_0 liegende Stelle $z = \infty$ bei einer gewissen nicht identischen Substitution der Gruppe Γ. Zufolge der Annahme, dass kein Fixpunkt h_i oder k_i mit dem Nullpunkt zusammenfällt, lässt sich dasselbe hinsichtlich der Stellen $g_\rho : m_\rho$ erreichen. Dieselben sind nämlich Bildpunkte der Stelle $z = 0$. Da nun diese Stelle mit keinem Fixpunkt h_i zusammenfällt, so kann man die Kreise H_i so klein wählen, dass keiner derselben die Nullstelle einschliesst. Wenn nachher die p_i hinreichend gross gewählt werden, wird dasselbe auch für die Kreise K_i erreicht, da diese die Stellen k_i einschliessenden Kreise für hinreichend grosse p_i beliebig klein werden (s. oben), und andererseits auch keine Stelle k_i in $z = 0$ liegt. Dies vorausgesetzt, liegt also $z = 0$ innerhalb R_0, und folglich jeder Bildpunkt von $z = 0$ innerhalb irgend eines Kreises H_i oder K_i, und zwar innerhalb desselben Kreises, wie der entsprechende Bildpunkt von $z = \infty$, da bei jeder Substitution das ganze Gebiet R_0 in ein anderes übergeht, welches im Inneren eines Kreises H_i oder K_i liegt. Wenn man ferner beachtet, dass jede Substitution B_i^λ bez. $B_i^{-\lambda}$ $(\lambda > 0)$ das ganze von den beiden Kreisen H_i und K_i ausgeschlossene Gebiet in ein gewisses Gebiet innerhalb K_i bez. H_i verwandelt, und andererseits dass im Producte

(1) $i_{\rho+1}$ und i_ρ immer verschieden sind, so sieht man ein, dass eine Substitution

$$B_{i_\rho}^{\lambda_\rho} B_{i_{\rho-1}}^{\lambda_{\rho-1}} \dots B_{i_2}^{\lambda_2} B_{i_1}^{\lambda_1}$$

den Bereich R_0 in einen Theil von K_{i_ρ} bez. H_{i_ρ} überführt, je nachdem $\lambda_\rho > 0$ oder < 0 ist (für $i_\rho = i_{\rho-1}$ und mit verschiedenen Vorzeichen von λ_ρ und $\lambda_{\rho-1}$ würde dies dagegen nicht nothwendig gelten). Da dies für das ganze Gebiet R_0 und seine Abbildungen gilt, so gilt es speciel für die R_0-Stellen $z = \infty$ und $z = 0$ und ihre Bildpunkte: die Stellen $f_\rho : l_\rho$ und $g_\rho : m_\rho$ liegen beide in K_{i_ρ} oder beide in H_{i_ρ}. Da nun diese Kreise von denjenigen $[K_{i_{\rho+1}}$ und $H_{i_{\rho+1}}]$ *verschieden* sind, deren Centra in $k_{i_{\rho+1}}$ und $h_{i_{\rho+1}}$ fallen, und da die 2σ Kreise sich vollständig ausschliessen, so lässt sich für die absoluten Beträge der in (3) vorkommenden 4 Differenzen $\frac{f_\rho}{l_\rho} - h_{i_{\rho+1}}$ etc. eine von Null verschiedene untere Grenze angeben, sowie offenbar auch eine endliche obere Grenze. Hieraus in Verbindung mit der ersten der Gleichungen (3) folgt ersichtlich, dass unabhängig vom Vorzeichen für $\lambda_{\rho+1}$ sowie überhaupt von der Wahl der Substitution V_ν und vom Werthe der Zahl ρ

$$\left|\frac{l_{\rho+1}}{l_\rho}\right| > P^{|\lambda_{\rho+1}|} . C . \left[1 - P^{-2|\lambda_{\rho+1}|} . D\right] \tag{4}$$

ist, wo P eine (positive) untere Grenze für die p_i bedeutet, C und D positive Minimum- bez. Maximum-Grössen, welche sich bei unbegrenzter Vergrösserung von P gewissen festen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwerthen nähern, welche nur von der Lage der Fixpunkte h_i, k_i abhängen. Für hinreichend grosses P kommt also der Klammerausdruck in (4) — welcher ja unter Umständen < 0 sein könnte — beliebig nahe dem Werthe 1. Es lässt sich somit jedenfalls eine Grösse $g < 1$ aber > 0 so bestimmen, dass sobald P hinreichend gross ist

$$\left|\frac{l_{\rho+1}}{l_\rho}\right| > g . P^{|\lambda_{\rho+1}|}$$

und folglich (da $g < 1$, $|\lambda_{\rho+1}| \geqq 1$ ist)

$$\left|\frac{l_{\rho+1}}{l_\rho}\right| > (gP)^{|\lambda_{\rho+1}|} \tag{5}$$

wird. Hiermit verbinde man noch die aus (2) unmittelbar hervorgehende Ungleichheit

$$|l_1| > P^{|\lambda_1|} \cdot \frac{1 - P^{-2}}{\text{Max}\,|h_i - k_i|},$$

welche wiederum auf

$$(6) \qquad |l_1| > (gP)^{|\lambda_1|}$$

führt — nachdem man, wenn nöthig, den vorher gewählten g-Werth hinreichend vermindert hat. Aus 5 und 6 folgt

$$(7) \qquad |l_n| > (gP)^{\sum_1^n |\lambda_\rho|}.$$

Für $|m_n|$ erhält man in derselben Weise ganz dieselbe Ungleichheit; nur muss man möglicherweise für g einen kleineren Werth nehmen, da m_1 nach (2) nicht ganz dieselbe Form hat, wie l_1, und also die Ungleichheit (6) nicht nothwendig mit dem früheren g auch für $|m_1|$ gilt. Jedenfalls kann man aber g so klein (aber > 0) wählen, dass nicht nur $|l_n|$ sondern auch $|m_n|$ grösser als das rechte Glied in (7) wird. Wir denken uns ein solches g gewählt. Hinsichtlich f_n und g_n erinnern wir uns, dass die Quotienten $f_n : l_n$ und $g_n : m_n$ zwischen (endlichen und) von Null verschiedenen Grenzen bleiben. Hieraus folgt, dass wenigstens für einen hinreichend kleinen $g_1 < g$ aber > 0 weder $|f_n|$ noch $|g_n|$ kleiner als oder gleich

$$(g_1 P)^{\sum_1^n |\lambda_\rho|}$$

sein kann. Und dies heisst mit anderen Worten: es lässt sich eine Grösse $g > 0$ so bestimmen, dass nicht nur $|l_n|$ und $|m_n|$, sondern auch $|f_n|$ und $|g_n|$ grösser als das zweite Glied in (7) werden — immer unter der Voraussetzung, dass P hinreichend gross ist (und somit die p_i hinreichend gross). Jetzt sei q eine beliebige, gegebene positive Grösse. Nach dem vorigen ist es möglich, einen P-Werth so zu bestimmen, dass die Ungleichheit (7) und die drei analogen für diesen P-Werth und alle grösseren gelten, wenn g einen gewissen *festen* Werth hat (und — wie immer vorausgesetzt wurde — in jedem Falle die p_i, welche die Coefficienten l_n etc. näher bestimmen, sämmtlich grösser als P sind). Wenn nöthig, vergrössern wir jetzt P so, dass $gP > q$ wird. Dann gelten die vier genannten Ungleich-

heiten *a fortiori*, wenn man q statt gP einführt. Da nun ferner, der obigen Herleitung gemäss, jene Ungleichheiten nicht an einer bestimmten Substitution geknüpft sind, sondern unter den angegebenen Voraussetzungen hinsichtlich g und P für *jede* Substitution der Gruppe Γ gelten, so folgt: bei gegebenem, beliebigem q lässt sich ein P so bestimmen, dass sobald alle $p_i > P$ sind, die absoluten Beträge der Coefficienten $a_\nu, b_\nu, c_\nu, d_\nu$ einer beliebigen in unimodularer Form geschriebenen Substitution V_ν der Gruppe Γ je grösser als

$$q^{\operatorname{Ind} V_\nu}$$

sind, w. z. b. w.

Erweiterung des Satzes. Die Annahme, dass die σ Substitutionen *hyperbolisch* sein sollten (die p_i reell und positiv), haben wir bisher nur der Einfachheit wegen festgehalten. Der Satz gilt (mit $|p_i|$ statt p_i) eben so gut, wenn sie (alle oder theilweise) *loxodromisch* sind. Der Beweis ist grösstentheils wörtlich in derselben Weise zu führen, doch können natürlich die Kreise H_i und K_i jetzt nicht Niveaulinien sein.[1]

Die entsprechenden homogenen Gruppen.

Da der Fundamentalbereich R_0 keine elliptischen oder parabolischen Ecken aufweist, und da jedenfalls für hinreichend grosse p_i auch keine »secundäre Relationen»[2] zwischen den Erzeugenden der Gruppe Γ bestehen können [sobald, wie wir immer annehmen, die 2σ Kreise H_i, K_i einander vollständig ausschliessen, können ja, wie schon bemerkt, überhaupt keine Relationen zwischen den B_i vorhanden sein] so ist die Gruppe Γ in folgender Weise »isomorph spaltbar»:[3] wenn man von den Substitutionen B_i,

$$B_i \equiv \left\{ z', \frac{L_i z + M_i}{N_i z + P_i} \right\},$$

---

[1] Bei Voraussetzung von *parabolischen* Substitutionen (äusserlicher Berührung zweier Kreise H_i und K_i) behauptet — beiläufig gesagt — BURNSIDE (l. c. p. 57), dass der von ihm bewiesene Satz sich auch in diesem Falle durch eine sehr einfache Modification der Beweisführung darlegen lässt, ohne dass die Art dieser Modification näher angegeben wird. Auch bei FRICKE-KLEIN (*Autom. F.* II, 1, p. 166) wird diese Behauptung BURNSIDE's hervorgehoben. Ist aber dieselbe wirklich richtig?

[2] FRICKE-KLEIN, l. c. I, p. 175.

[3] Ibid. p. 200.

wo L_i, M_i, N_i, P_i die unimodulare Form

$$L_i = \frac{k_i p_i - h_i p_i^{-1}}{h_i - k_i}, \qquad M_i = -\frac{h_i k_i (p_i - p_i^{-1})}{h_i - k_i},$$

$$N_i = \frac{p_i - p_i^{-1}}{h_i - k_i}, \qquad P_i = -\frac{h_i p_i - k_i p_i^{-1}}{h_i - k_i}$$

haben [welche aus (2) für $\lambda = 1$ hervorgeht], zu den ***homogenen*** Substitutionen C_i,

$$(8) \qquad C_i \equiv \begin{Bmatrix} t', & L_i t + M_i v \\ v', & N_i t + P_i v \end{Bmatrix}$$

übergeht, so bestimmen die σ ***unimodularen*** Substitutionen C_i als Fundamentalsubstitutionen eine homogene ternäre Gruppe Δ, welche mit Γ ***holoedrisch isomorph*** ist [und eine ähnliche Gruppe geht hervor, wenn man in (8) für gewisse bez. für alle i die vier Coefficienten mit -1 multiplicirt; wir bestimmen uns aber jetzt eben für die Form (8)].

Da die Fundamentalsubstitutionen der Gruppe Δ sämmtlich unimodular sind, so ist auch jede zu Δ gehörende Substitution unimodular. Die Relationen (2) und (3) gelten somit — mutatis mutandis — noch für die Gruppe Δ, da sie unimodulare Form der entsprechenden Γ-Substitutionen voraussetzen. In der That sind aber jene Gleichungen so gebildet, dass sie ganz unmittelbar (ohne Zeichenänderung) die Coefficienten bez. Coefficientenrelationen auch für die Δ-Substitutionen U_ν angeben (was doch jetzt unwesentlich ist).

Offenbar lässt sich der obige »Hülfssatz» auch auf die Gruppe Δ übertragen:

Abgeänderte Form des Hülfssatzes: Der Satz lässt sich so modificieren, dass man statt die nicht-homogene Gruppe Γ zu betrachten und dabei unimodulare Form vorauszusetzen, *die unimodulare homogene Gruppe Δ einführt; der Wortlaut des Satzes bleibt übrigens ganz derselbe.*

Modification der Poincaré'schen ξ-Reihen.

Die Poincaré'schen ξ-Reihen sind bekanntlich in folgender Weise gebildet.

vorausgesetzt wird.[1] In dem Falle, wo die Gruppe ϑ lauter elliptische Substitutionen enthält, lässt es sich zeigen, dass jene Convergenz für η-Werthe innerhalb des Einheitskreises wirklich stattfindet, nur mit Ausnahme für gewisse nirgends gehäufte Stellen.[2] Wenn dagegen parabolische Substitutionen vorhanden sind, so kann die Convergenz nur unter der Voraussetzung bestehen, dass diejenigen Fundamentalsubstitutionen von θ, welche parabolischen Substitutionen in ϑ entsprechen, Fundamentalgleichungen besitzen, deren sämmtliche Wurzeln dem absoluten Betrage nach gleich 1 sind. Diese wesentliche Beschränkung hat zur Folge, dass die ξ-Reihen nur in sehr beschränkter Weise angewandt werden können, wenn es sich um die RIEMANN'sche Existenzfrage handelt: nur unter der schon oben angedeuteten, sehr wesentlichen Specialisirung lässt sich, wie Herr SCHLESINGER gezeigt hat, die Existenzfrage mittels der ξ-Reihen entscheiden. Anders scheint es sich aber zu verhalten, wenn man die Form der Reihen in geeigneter Weise modificiert.

Zunächst werden wir uns jetzt, ohne direkte Rücksicht auf die RIEMANN'sche Existenzfrage, mit einer möglichen Modification der ξ-Reihen beschäftigen.

Wir setzen vorläufig nur voraus, dass bei gegebenen, im endlichen liegenden Stellen $e_1, e_2, \ldots, e_\sigma$ und gegebenen Fixpunkten h_i, k_i für die σ Fundamentalsubstitutionen B_i einer nicht-homogenen Gruppe Γ der oben beschriebenen Art, wenigstens für alle $|p_i|$, welche je $>$ ein gewisses P sind, Functionen $t(x)$ und $v(x)$ angebbar seien, welche, wenn x die Schnitte $(e_1\infty)\ldots(e_\sigma\infty)$ im positiven Sinne überschreitet bez. die homogenen Substitutionen $C_1\ldots C_\sigma$, welche den B_i entsprechen (s. oben), erfahren, sonst aber in der ganzen x-Ebene holomorph sind.

Dies vorausgesetzt, betrachten wir jetzt eine »normale FUCHS-sche Differentialgleichung» zweiter Ordnung

$$(10) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = q(x)y,$$

[1] POINCARÉ, Acta Math. 5, p. 232. SCHLESINGER, *Handbuch*, II, 2, p. 347.

[2] Eine Punktmenge, welche im *Inneren* des Kreises $|\eta| = 1$ keine Häufungsstellen hat, bezeichnen wir kurz als innerhalb des Kreises »nirgends gehäuft» — was natürlich etwas anderes als »nirgends dicht» ist, sowie auch etwas anderes als »isolirt».

für welche die endlichen wesentlichen singulären Stellen eben die gegebenen $e_1 \dots e_\sigma$ sind, und die zugehörigen Fundamentalsubstitutionen

$$A_1, A_2, \dots, A_\sigma,$$

der projectiven Monodromiegruppe ϑ sämmtlich *parabolisch* sind, sowie auch die Umlaufssubstitution

$$A_{\sigma+1} \equiv A_1^{-1} A_2^{-1} \dots A_\sigma^{-1}.$$

Es ist somit x eine *eindeutige* Function eines Integralquotienten η innerhalb des Einheitskreises $|\eta| = 1$. Und zwischen den σ Substitutionen $A_1 \dots A$ bestehen (da keine elliptischen Substitutionen vorkommen) keine »Fundamentalrelationen». Dass eine solche Differentialgleichung wirklich existieren muss, lässt sich bekanntlich mittels der von POINCARÉ und KLEIN herrührenden »méthode de continuité» nachweisen.[1]

Da auch zwischen den B_i keine Relationen bestehen, so werden bekanntlich die beiden Gruppen Γ und ϑ holoedrisch isomorph, und zwar so, dass $B_1, B_2, \dots, B_\sigma$ bez. mit $A_1, A_2, \dots, A_\sigma$ correspondiren. Da nun, wie wir sahen, andererseits zwischen Γ und Δ holoedrische Isomorphie besteht, so sind also auch ϑ und Δ holoedrisch isomorph (so dass A_i mit C_i correspondirt). Als Folge hiervon im Verein mit der Eindeutigkeit von x als Function von η erkennt man sofort: wenn die postulirten Functionen $t(x)$ und $v(x)$, wie wir es jetzt thun wollen, als *mehrdeutige Functionen einer Stelle der unzerschnittenen x-Ebene* aufgefasst werden,[2] so sind sie *als Functionen von η eindeutig:*

$$t = \varphi(\eta), \qquad v = \psi(\eta),$$

mit der Eigenschaft

$$\varphi(S_\nu \eta) = a_\nu \varphi(\eta) + b_\nu \psi(\eta),$$
$$\psi(S_\nu \eta) = c_\nu \varphi(\eta) + d_\nu \psi(\eta),$$

wo S_ν eine beliebige Substitution der in einfacher Reihe geordneten Gruppe

---

[1] Es würde übrigens für unseren jetztigen Zweck hinreichen, dass es Differentialgleichungen zweiter Ordnung giebt, welche der genannten »subordinirt» sind. Vgl. SCHLESINGER, *Handbuch etc.* II, 2, p. 383—84.

[2] Es handelt sich hier natürlich um die mehrdeutigen Functionen, welche durch irgend ein Element der ursprünglichen Function $t(x)$ bez. $v(x)$ bestimmt werden.

ϑ bedeutet, a_ν, b_ν, c_ν, d_ν die Coefficienten der entsprechenden Δ-Substitution U_ν (wie oben).

Die Abwesenheit von Relationen zwischen $A_1 \ldots A_\sigma$ hat natürlich auch zur Folge, dass ϑ und Θ $(r, 1)$-deutig holomorph sind. Wir können also bei der Bildung der ξ-Reihen (9) *formal* gesehen eben die gegenwärtige Gruppe ϑ benutzen. Aber freilich ist hierbei im allgemeinen nicht an Convergenz zu denken, da sogar alle Fundamentalsubstitutionen von ϑ parabolisch sind. Wir werden es aber jetzt versuchen, die Reihen so zu modificieren, dass Convergenz erreicht wird, und zwar mit Hülfe der postulirten Functionen $t(x) = \varphi(\eta)$, $v(x) = \psi(\eta)$. Man setze in der That, ξ durch χ ersetzend,

(11) $$\chi_i(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ T_\nu^{-1} \frac{H_i(S_\nu \eta)}{\varphi(S_\nu \eta)} \right\} \left(\frac{d(S_\nu \eta)}{d\eta} \right)^m.$$

Wir werden zeigen, dass diese Reihen, von einer nirgends gehäuften Menge von η-Werthen abgesehen, überall innerhalb des Einheitskreises $|\eta| = 1$ unbedingt convergiren, sobald die oben mit p_i bezeichneten Grössen hinreichend gross sind (wogegen m nur $\geqq 2$ sein soll).

Man weiss, dass die POINCARÉ'schen *Thetareihen*

(12) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} H_i(S_\nu \eta) \left(\frac{d(S_\nu \eta)}{d\eta} \right)^m$$

diese Convergenz aufweisen, wenn $m \geqq 2$. Jedem Gliede von (12) entspricht aber ein Glied in (11) mit n Partialgliedern. Es hat nämlich (11), ausführlicher geschrieben, die Form

$$\chi_i(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{x=1}^{n} A_{ix}^{(\nu)} \frac{H_x S_\nu(\eta)}{\varphi(S_\nu \eta)} \right\} \left(\frac{d(S_\nu \eta)}{d\eta} \right)^m,$$

wo $A_{ix}^{(\nu)}$ Coefficienten der Substitution T_ν^{-1} bedeuten (und also zur Determinante der directen Substitution T_ν als Subdeterminanten gehören, falls die Gruppe Θ unimodular ist, was wir doch jetzt keineswegs voraussetzen). Hieraus folgt, dass mit Sicherheit unbedingte Convergenz der Reihen (11) stattfindet, falls die Quotienten

(13) $$\frac{A_{ix}^{(\nu)}}{\varphi(S_\nu \eta)}$$

dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Grenze bleiben. Dies können wir aber jetzt bewirken. Wenn die Coefficienten zweier linearer homogener Substitutionen in n Veränderlichen dem absoluten Betrage nach kleiner als A (>0) bez. B (>0) sind, so sind die Coefficienten der aus diesen beiden Substitutionen (in der einen oder anderen Ordnung) zusammengesetzten Substitution absolut genommen $< n \,.\, AB$. Hieraus folgt: wenn M eine solche positive Grösse bedeutet, dass die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen $\mathbf{A}_i$ ($i = 1, \ldots, \sigma$) der Gruppe Θ und ebenso der inversen $\mathbf{A}_i^{-1}$ dem absoluten Betrage nach durchgehends $< M$ sind, so müssen die Coefficienten einer Θ-Substitution, welche sich aus μ successiven $\mathbf{A}_i$ und $\mathbf{A}_i^{-1}$ zusammensetzen lässt, absolut genommen kleiner als

$$M \,.\, (nM)^{\mu-1} = n^{\mu-1} \,.\, M^{\mu}$$

sein, und folglich auch $< (nM)^{\mu}$. Dies gesetzt, betrachte man eine bestimmte ϑ-Substitution $S_\nu \eta$ und die entsprechende Δ-Subst. $U_\nu \eta$. Beide haben einen bestimmten »Index«, welcher auch für beide denselben Werth hat, $\beta = \sum |\lambda_i|$ (s. oben). Die entsprechende (eindeutig bestimmte) Θ-Substitution T_ν, sowie auch die inverse T_ν^{-1} lässt sich natürlich immer aus β successiven $\mathbf{A}_i$ und $\mathbf{A}_i^{-1}$ zusammensetzen (obgleich möglicherweise auch aus einer geringeren Anzahl, da die Isomorphie zwischen Θ und ϑ bez. Δ nicht holoedrisch vorausgesetzt wurde). Es ist somit $|A_{i\varkappa}^{(\nu)}| < |nM|^{\beta}$. Wir wählen jetzt eine positive Grösse $q > nM$ und nehmen die Grössen $|p_i|$ sämmtlich so gross, dass (nicht nur die für dieselben immer vorausgesetzten Bedingungen erfüllt sind, sondern auch) $|a_\nu|$ und $|b_\nu| > q^{\beta}$ werden, was nach dem Hülfssatze möglich ist. Andererseits: wenn η so gewählt wird, dass $\psi(\eta)$ nicht verschwindet, so kann man den Quotienten (13) in der Form

$$(14) \qquad \frac{A_{i\varkappa}^{(\nu)}}{a_\nu \psi(\eta) \left\{ \dfrac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)} + \dfrac{b_\nu}{a_\nu} \right\}}$$

schreiben. Zufolge des soeben über die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ und a_ν gesagten, liegt also der absolute Betrag des Quotienten (13) unabhängig von ν unterhalb einer endlichen Grenze, falls für die Grösse

$$(15) \qquad \left| \frac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)} + \frac{b_\nu}{a_\nu} \right| = \left| z(\eta) + \frac{b_\nu}{a_\nu} \right|$$

eine von Null verschiedene untere Grenze angebbar ist (es wurde hier $\varphi : \psi = z$ gesetzt). Dies ist aber zufolge unserer Annahmen wirklich der Fall, nur mit Ausnahme für eine im Inneren des Kreises $|\eta| = 1$ nirgends gehäufte Menge von η-Werthen, wie man folgendermassen einsehen kann.

Als Quotient zweier eindeutiger Functionen ist z eine eindeutige Function von η (für $|\eta| < 1$). Bei Ausübung einer Substitution der Gruppe ϑ auf η ändert sich z nach der entsprechenden Substitution der mit ϑ holoedrisch isomorphen Gruppe Γ (durch deren Spaltung die homogene Gruppe Δ entstand). Der Functionszusammenhang zwischen η und z kann auch einfach so ausgedrückt werden, dass sie beide Functionen von x mit denselben Verzweigungsstellen, nämlich $e_1, e_2, \ldots, e_\sigma$ und $e_{\sigma+1} = \infty$, sind.[1] Einer beliebigen Stelle η_0 im Inneren des Kreises $|\eta| = 1$ entspricht eine bestimmte x-Stelle x_0, welche von den Stellen $e_1, \ldots, e_\sigma, e_{\sigma+1} = \infty$ verschieden ist. Und in der Umgebung von η_0 ist x holomorphe Function von η. Andererseits wurde angenommen, dass t und v in der Nähe von $x = x_0$ holomorph sind; folglich werden t und v, d. h. $\varphi(\eta)$ und $\psi(\eta)$ in der Nähe von $\eta = \eta_0$ holomorphe Functionen von η. Der Quotient $z = \varphi : \psi$ ist also überall innerhalb des Kreises $|\eta| = 1$ meromorphe Function von η. Dem Werthe $z = 0$ entspricht, da derselbe (wie oben angenommen wurde) innerhalb R_0 liegt und also nicht zu den »Grenzpunkten» der Gruppe Γ gehört, eine gewisse Menge M von η-Werthen innerhalb des Kreises $|\eta| = 1$. Diese Menge kann, auch wenn sie unendlich ist, im Inneren des Kreises keine Häufungsstellen haben, weil eine solche die Meromorphie aufheben sollte. Die mit $z = 0$ im Sinne der Gruppe Γ congruenten z, d. h. die Stellen $-(b_\nu : a_\nu)$ correspondiren je mit einer Menge M_ν, welche im Sinne der Gruppe ϑ mit M congruent ist, und ganz wie M keine Häufungsstelle mit $|\eta| < 1$ haben kann. Es kann auch die Gesammtheit $\mathbf{M}$ aller dieser Mengen $M, M_1, M_2, \ldots$ nur auf der Kreisperipherie Häufungsstellen haben. Denn eine Häufungsstelle für $\mathbf{M}$ muss offenbar auch den Grenzstellen der Gruppe Γ angehören. Es ist, m. a. W., $\mathbf{M}$ eine im Inneren des Einheitskreises nirgends gehäufte η-Menge (für welche aber »die derivirte Menge» $\mathbf{M}'$ aus sämmtlichen Punkten der Kreisperipherie besteht). Ganz ähnliches gilt auch für die Gesammtheit $\mathbf{N}$ aller

[1] Hieraus folgt natürlich nicht, dass auch η eindeutige Function von z wird, da x nicht als eindeutige Function von z nachgewiesen ist.

η-Stellen, für welche $\psi : \varphi = 0$ [$z = \varphi : \psi$ unendlich gross] ist, oder welche mit solchen Stellen congruent sind. Dasselbe gilt [da φ und ψ, für sich betrachtet, holomorph sind, sobald $|\eta| < 1$] auch für die Menge $\mathbf{M}_1$ bez. $\mathbf{N}_1$ derjenigen η-Stellen, welche für φ bez. ψ Nullstellen oder mit Nullstellen congruente Stellen sind [da für $|\eta| < 1$ φ und ψ endlich sind, hat man $\mathbf{M}_1 \equiv \mathbf{M} +$ eine eventuelle nirgends gehäufte η-Menge mit $\varphi = \psi = a_\nu\varphi + b_\nu\varphi = 0$, aber z nicht $= 0$; und analog für $\mathbf{N}_1$]. Und $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{N}_1$ bilden dann natürlich auch zusammengenommen eine im Inneren des Einheitskreises nirgends gehäufte Menge.

Jetzt wählen wir im Kreisinneren eine Stelle η, welche nicht zur Menge $\mathbf{M}_1$ gehört und andererseits für $\psi(\eta)$ nicht gerade eine Nullstelle ist. Dann ist der entsprechende z-Werth von jeder Stelle $-(b_\nu : a_\nu)$ [darunter $z = -(b_0 : a_0) = 0$ einbegriffen] verschieden, und gehört auch nicht zu den Grenzstellen der Gruppe Γ. Es lässt sich somit eine von Null verschiedene untere Grenze für (15) angeben. Folglich ist (s. oben) die Reihe (11) unbedingt convergent, falls η nicht mit einer ∞-Stelle der Function $H_i(\eta)$ congruent oder zusammenfallend ist. Nun sind innerhalb $|\eta| = 1$ nicht nur diese letztgenannten Stellen nirgends gehäuft, sondern auch die Menge $\mathbf{M}_1 +$ Nullstellen von $\psi(\eta)$ hat, dem gleich oben gesagten gemäss, diese Eigenschaft. Wir haben also wirklich bewiesen, dass unter den obengenannten Voraussetzungen die Reihe (11) für $|\eta| < 1$ unbedingt convergirt, nur mit Ausnahme für eine nirgends gehäufte η-Menge.

Hierbei kann nachher bemerkt werden, dass die Convergenz auch für gewisse unter den bei unserer Beweisführung ausgeschlossenen Stellen noch besteht (oder bestehen kann). Es sind dies die Nullstellen von ψ, welche nicht zugleich Nullstellen von φ sind; für solche Stellen (wenn sie existiren) ist $\varphi(S_\nu\eta) = a_\nu\varphi(\eta)$, was im Verein mit den Eigenschaften der Coefficienten a_ν zur Folge hat, dass der Quotient (13) dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Grenze bleibt. Für $\varphi = \psi = 0$ wird dagegen im allgemeinen jedes Glied der Reihe unendlich gross.

Nachdem wir also die mit den erwähnten Ausnahmen bestehende *unbedingte* Convergenz unserer Reihen dargethan haben, sieht man leicht ein, dass in einer hinreichend kleinen Umgebung einer beliebigen Convergenzstelle die Convergenz auch *gleichmässig* ist (so dass also die Reihen mit Sicherheit analytische Functionen darstellen). Es folgt dies daraus, dass einerseits jene gleichmässige Convergenz bei den Thetareihen stattfindet,

andererseits die unbedingte Convergenz der χ-Reihen in der oben angegebenen Weise aus derjenigen der Thetareihen folgt.

Wenn wir jetzt die n Reihen χ_i durch zugehörige Thetareihen dividiren, also n Functionen

$$y_i = \frac{\chi_i(\eta)}{\theta_i(\eta)}$$

bilden, so haben diese Quotienten, ganz wie die analogen, mit convergenten ξ-Reihen gebildeten, die Eigenschaft, die Substitutionen $\mathsf{A}_1 \ldots \mathsf{A}_\sigma$ zu erfahren, wenn man auf η bez. die Substitutionen $A_1 \ldots A_\sigma$ ausübt, und folglich auch als x positive Umläufe um die Stellen $e_1 \ldots e_\sigma$ vollzieht.

Inwieweit diese y_i auch den übrigen Bedingungen der gestellten Aufgabe genügen, werden wir jetzt zusehen.

Reduction der aufgestellten Existenzfrage auf den Fall $n = 2$.

In der Umgebung einer von den $e_1 \ldots e_\sigma$, $e_{\sigma+1}$ verschiedenen x-Stelle sind die y_i [d. h. alle Zweige der y_i] meromorph (bez. holomorph). Wenn nämlich zunächst angenommen wird, dass die entsprechenden η mit keiner Nullstelle von $\varphi(\eta)$ und mit keiner ∞-Stelle einer Function $H_i(\eta)$ zusammenfällt oder congruent ist, so werden nicht nur die Reihen $\theta_i(\eta)$ sondern auch die $\chi_i(\eta)$ für den fraglichen x-Werth (absolut) convergent und in der Umgebung desselben holomorph (obgleich natürlich unendlich vieldeutig, den verschiedenen zur x-Stelle gehörenden η entsprechend). Bei einem x-Werth, für den die entsprechenden (unter einander congruenten) η eine ∞-Stelle von $H_i(\eta)$ enthalten, wird bekanntlich (und aus leicht ersichtlichen Gründen) ein Glied der Reihe θ_i wie eine rationale Function unendlich gross, während die übrigen für sich eine convergente Reihe bilden, weshalb die ganze Reihe sich meromorph verhält. Diese Meromorphie geht auch auf die χ-Reihen über, indem auch hier ein entsprechendes Glied wie eine rationale Function unendlich wird (doch kann hierbei sogar Holomorphie eintreten, wenn zwei verschiedene H_i gleichzeitig unendlich werden, wobei eine Compensation denkbar ist). Der Einfachheit wegen nehmen wir an (obgleich dies nicht nothwendig ist, vgl. unten), dass die ∞-Stellen der Functionen $H_i(S_\nu\eta)$ von den Nullstellen der Functionen $\varphi(S_\nu\eta)$ vollständig getrennt liegen. Was nun die Nullstellen

von $\varphi(S_\nu\eta)$ betrifft, so nehmen wir zunächst an, dass einem gewissen x-Werthe (unter anderem) ein η-Werth entspricht, für den $\varphi(\eta) = 0$ ist, ohne dass $\psi(\eta) = 0$. Für diesen η-Werth wird im allgemeinen das erste Glied einer χ-Reihe unendlich gross; für die congruenten η je ein anderes Glied; die restierenden Glieder bilden aber in jedem Falle eine convergente Reihe; dies ergiebt sich in ganz derselben Weise, wie oben die Convergenz der ganzen Reihe bei einem beliebigen η-Werthe (wie wir sahen, hängt dieselbe wesentlich davon ab, dass die Gruppe Γ eigentlich discontinuirlich ist). Etwas anders liegt die Sache, wenn in der fraglichen η-Menge ein η-Werth vorkommt, für den $\varphi(\eta) = \psi(\eta) = 0$ ist. Dann verschwinden in der That

$$\varphi(S_\nu\eta) = a_\nu\varphi(\eta) + b_\nu\psi(\eta), \qquad \psi(S_\nu\eta) = c_\nu\varphi(\eta) + d_\nu\psi(\eta)$$

unabhängig von ν [oder m. a. W.: für den fraglichen $x(=x_0)$ verschwinden *alle* Werthe der unendlich vieldeutigen Functionen $t(x)$ und $v(x)$] weshalb im allgemeinen alle Glieder einer χ-Reihe unendlich gross werden. In einer hinreichend kleinen Umgebung eines η-Werthes η_0 der fraglichen Werthgruppe bleibt, da $\psi(\eta)$ holomorphe Function von x ist, $|(x-x_0)^k : \psi(\eta)|$ unterhalb einer endlichen Grenze, falls k einen gewissen ganzen positiven Werth hat. Wenn andererseits $\lim\limits_{\eta=\eta_0} z(\eta)$ von Null und von jedem mit der Stelle Null congruenten z-Stelle $[-b_\nu : a_\nu]$ verschieden ist, so bleibt auch der inverse Werth des Ausdruckes (15), aus oben angegebenen Gründen, unterhalb einer endlichen Grenze. Da dasselbe auch für $|A_{ii}^{(\nu)} : a_\nu|$ gilt, so resultirt, dass der Quotient (14) nach Multiplication mit $(x-x_0)^k$ in der Umgebung von η_0 innerhalb endlichen, von ν unabhängigen Grenzen bleibt. Hieraus folgt Meromorphie der χ-Reihe an der betrachteten Stelle: es kann keine Verzweigung in Frage kommen, da der betrachtete x nicht für $t(x)$ oder $v(x)$ Verzweigungsstelle ist, und andererseits hat die mit $(x-x_0)^k$ multiplicirte Reihe, zufolge des soeben gesagten, für $x = x_0$ einen endlichen Grenzwerth. Es liegt aber auch die Möglichkeit vor, dass für irgend einen ν-Werth $z = -b_\nu : a_\nu$ ist. Dann wird der inverse Werth von (15) für diesen ν-Werth unendlich gross, aber — ganz wie oben — so, dass nach Multiplication mit einer gewissen Dignität $(x-x_0)^h$ einen endlichen Grenzwerth hervorgeht. Für die übrigen ν bleibt aber — auch ganz wie oben — jener inverse Werth unterhalb einer (von ν unabhängigen) endlichen Grenze. Hieraus im Verein mit dem gleich oben gesagten folgt

sofort, dass die Reihe nach Multiplication mit $(x - x_0)^{h+k}$ einen endlichen Grenzwerth erhält, indem der Grenzwerth eines gewissen einzelnen Gliedes einen gewissen endlichen Werth hat, während die Summe der übrigen Glieder gegen Null tendirt. Die Meromorphie bleibt also offenbar auch jetzt bestehen.

Da also in den Ausdrücken für die n Functionen y_i sowohl Zähler als auch Nenner, als Functionen von x betrachtet, wenigstens *von den Stellen* $e_1 \ldots e_\sigma$, $e_{\sigma+1}$ *abgesehen*, sich überall *wie rationale Functionen* verhalten, so gilt dasselbe auch für die Quotienten y_i selbst.

Was nun endlich die Stellen $e_1 \ldots e_\sigma$, $e_{\sigma+1}$ betrifft, so haben bekanntlich die Thetareihen der jetzt fraglichen Art, als Functionen von x betrachtet, auch an diesen Stellen den »Charakter der Bestimmtheit» (wenn auch nicht den Charakter rationaler Functionen). Für die χ-Reihen ist ein ähnliches Verhalten durchaus nicht zu erwarten, falls schon die Functionen $t(x)$ und $v(x)$ sich an den Stellen e_i nicht bestimmt verhalten. Aber auch die Annahme, dass alle e_i für $t(x)$ und $v(x)$ Bestimmtheitsstellen sind, ermöglicht (so viel wir haben finden können) nicht den Beweis, dass die χ-Reihen ein ähnliches Verhalten aufweisen. Bei speciellen Annahmen über die Gruppe θ kann dies wahrscheinlich eintreffen, kaum aber in allgemeinen. Unter dieser Voraussetzung verlieren also auch die Functionen y_i an den Stellen e den Charakter der Bestimmtheit. Der Bestimmtheitscharakter dieser Stellen wurde auch bei der obigen Fragestellung nicht erfordert.

Die Forderungen unseres Problems sind somit jetzt sämmtlich erfüllt nur mit Ausnahme für diejenige, dass die y_i an allen von den e_i verschiedenen Stellen *holomorph* sein sollten. Da aber Meromorphie schon erreicht ist, so kann man durch eine einfache Modification Holomorphie erreichen: man hat nur sämmtliche y_i durch eine *eindeutige*, mit Ausnahme für den e_i holomorphe Function $F(x)$ von x zu multipliciren, deren Nullstellen die ∞-Stellen der y_i compensiren. Die n Functionen

$$F(x) \, . \, y_i$$

haben dann alle verlangten Eigenschaften.

Das Resultat der obigen Untersuchung lässt sich folgendermassen zusammenfassen:

Es seien $e_1, e_2, \ldots, e_\sigma$ *gegebene* im Endlichen liegende x-Stellen. Ferner betrachte man σ lineare Substitutionen in der Ebene einer anderen Veränderlichen z:

$$\frac{z' - h_i}{z' - k_i} = p_i^2 \cdot \frac{z - h_i}{z - k_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

wo h_i, k_i, p_i die Bedingungen erfüllen, dass die h_i und k_i (die Fixpunkte) 2σ von einander getrennte Stellen der z-Ebene sind, welche auch sämmtlich von der Stelle $z = 0$ getrennt liegen, und andererseits die absoluten Werthe der (reellen oder imaginären) Multiplicatoren p_i^2 grösser als Eins sind (also die Substitutionen hyperbolisch oder loxodromisch). Von diesen (z', z)-Substitutionen gehe man durch »Spaltung« zu *unimodularen* homogenen $(t', v'; t, v)$-Substitutionen

$$C_1, C_2, \ldots, C_\sigma$$

über. Es kann gefragt werden, ob bei gegebenen Werthen der h_i, k_i und p_i (welche die genannten Bedingungen erfüllen) Functionen $t(x)$ und $v(x)$ immer existiren, welche beim Überschreiten (in positiver Richtung) von Schnitten $(e_1\infty \ldots e_\sigma\infty)$ bez. die Substitutionen $C_1 \ldots C_\sigma$ erleiden, sich aber sonst im Endlichen überall wie ganze rationale Functionen verhalten. Wir ersetzen aber diese Frage durch die folgende, in welcher viel weniger verlangt wird: Ist es möglich, die 2σ Stellen h_i und k_i so zu bestimmen, dass, wenn nachher eine *beliebig* grosse positive Zahl P gewählt wird, immer ein Werthsystem $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ mit

$$|p_1| > P, |p_2| > P, \ldots, |p_\sigma| > P$$

überhaupt gefunden werden kann, welches im Verein mit den h_i, k_i Substitutionen C_i geben, für welche Functionen $t(x)$ und $v(x)$ mit den genannten Eigenschaften existiren? *Wenn* diese Verhältnissmässig sehr bescheidene Existenzfrage im bejahenden Sinne zu beantworten ist (was wir hier nicht bewiesen haben) *dann* gilt dasselbe — dies ist unser Resultat — auch für die in der Einleitung formulirte Existenzfrage in ihrer vollen Allgemeinheit.

Wir knüpfen hieran noch folgende Bemerkungen. Es ist wohl kaum zu bezweifeln, dass die soeben erwähnte, auf den Fall $n = 2$ sich beziehende Existenzfrage im bejahenden Sinne zu beantworten ist. Doch

habe ich bisher einen strengen Beweis hierfür nicht durchgeführt. Es sei mir indessen gestattet, über diese Frage folgendes zu bemerken.

Zunächst ist leicht ersichtlich, dass man im jetztigen Zusammenhange die genannte Existenzfrage ein wenig modificiren kann, so dass noch weniger verlangt wird. Dies beruth darauf, dass der oben benutzte Hilfssatz sich in der That auf folgende Weise modificieren lässt. Für die 2σ Grössen h_i, k_i braucht man nicht bestimmte Werthe vorauszusetzen, sondern kann dieselben als unbestimmte Grössen betrachten, welche nur folgenden Bedingungen unterworfen sind: für $|h_i|$, $|k_i|$, $|h_i - k_i|$, $|h_i - h_j|$, $|h_i - k_j|$, $|k_i - k_j|$, wo $j \gtrless i$, sollen von Null verschiedene untere Grenzen existiren, und andererseits für h_i und k_i endliche obere Grenzen. Man bestätigt sehr leicht, dass der oben gegebene Beweis des Satzes noch unter diesen Voraussetzungen gültig bleibt. Dementsprechend kann auch die auf den Fall $n = 2$ sich beziehende Frage, auf welche sich die Hauptfrage reducirte, so abgeändert werden, dass man für die h_i, k_i ganz dieselbe Art von Unbestimmtheit voraussetzt, was geeignet sein kann, die Behandlung der Frage zu vereinfachen. Bei dieser Behandlung scheint es andererseits vortheilhaft zu sein können, für die Functionen $t(x)$ und $v(x)$ auch den ausnahmlosen »Charakter der Bestimmtheit» vorauszusetzen, also zunächst Differentialgleichungen (zweiter Ordnung) der Fuchs'schen Klasse im Auge zu haben. Dagegen dürfte es nicht viel daran zu denken sein, auch für $t(x)$ und $v(x)$ analytische Entwickelungen bilden zu können, welche die vorgeschriebenen functionalen Eigenschaften in Evidenz stellen.

Wenn es gelingt, für die soeben besprochene Existensfrage und damit auch für unsere jetztige Hauptfrage (als Existenzfrage betrachtet) eine bejahende Antwort definitiv festzustellen, so wird hiermit die ausnahmlose Lösbarkeit der ursprünglichen Riemann'schen Aufgabe nicht dargethan sein. Hierzu wäre noch der Nachweis erforderlich, dass in jedem Systeme von »cogredienten» linearen homogenen Differentialgleichungen auch Gleichungen der Fuchs'schen Klasse vorkommen. Da aber ein solcher Nachweis, obgleich noch nicht erbracht, jedenfalls als denkbar bezeichnet werden muss, so ist es auch nicht ausgeschlossen, dass die Entscheidung unserer jetztigen Frage auch für das unveränderte Riemann'sche Problem Bedeutung gewinnen kann.

Lund, Februar 1902.

SUR LES NOMBRES e ET π ET LES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES

PAR

EDMOND MAILLET

À PARIS.

On sait que le nombre e^{ϖ}, où ϖ est rationnel ou algébrique, ne peut être racine d'une équation algébrique à coëfficients rationnels, pas plus que les nombres qui présentent après chaque chiffre significatif un nombre de zéros croissants suffisamment vite avec le rang de ce chiffre et que nous appellerons des nombres X.[1]

Ces derniers nombres, comme leurs puissances rationnelles, n'étant pas racines des équations

$$\sum_0^\infty c_a x^{\varpi_a} = 0, \tag{1}$$

et d'autres analogues, où c_a est rationnel et ϖ_a entier positif, quand $\frac{1}{c_a}$ ou ϖ_a croît suffisamment vite avec a, on pouvait se demander s'il en était de même de e et ses puissances, de π, d'autres nombres encore. La réponse est affirmative: les méthodes de MM. Hilbert et Hurwitz pour établir la transcendance de e et de π permettent de déterminer une limite inférieure de ces modes de croissance: nous en donnons un exemple particulier.

On peut obtenir d'ailleurs des résultats de même nature pour tout nombre ζ algébrique ou non, ou pour les nombres de la forme

$$Y = Y_1 + \frac{a_1}{\zeta_1^{\varphi_1}} + \ldots + \frac{a_i}{\zeta_i^{\varphi_i}} + \ldots,$$

---

[1] Comptes rendus, 15 avril 1901 et Journ. de Math., 1901. Au sujet de ce mémoire on pourra consulter E. Strauss, Acta math., t. 11, p. 13.

Comp. Borel, Comptes rendus, 1899, 1er semestre, p. 490 et 597. Pour la lecture de notre Mémoire il suffit de connaître les passages d'ouvrages ou mémoires cités par nous ici. Un résumé de ce mémoire a été communiqué à l'Acad. des Sc. de Paris (C. R., 1901, 2ème sem., p. 989 et 1191).

On sait qu'Abel a établi l'impossibilité de la résolution par radicaux des équations algébriques de degré ≥ 4. On peut se poser des problèmes analogues pour des équations transcendantes à coefficients rationnels: notre mémoire en traite quelques-uns.

(ζ_1 fonction algébrique d'un nombre quelconque ζ, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \ldots$ entiers $\leqq E(\zeta)$); quand ψ_l croît suffisamment vite avec l, Y ne peut être ni algébrique ni racine de (1).

Ces résultats s'étendent aux équations rationnelles de la forme

$$\sum_0^\infty c_a x^{\tilde{\omega}_a} + \sum_0^\infty \frac{c_a^0}{x^{\tilde{\omega}_a^0}} + \ldots + \sum_0^\infty \frac{c_a^k}{(x-\beta_k)^{\tilde{\omega}_a^k}} = 0,$$

où $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ sont distincts, rationnels et $\neq 0$.[1]

Au point de vue algébrique, si c_n décroît suffisamment vite, nous donnons un moyen de déterminer approximativement les racines de

$$\sum_0^\infty c_a x^{\tilde{\omega}_a} = 0$$

qui sont toutes distinctes, et un moyen simple de trouver le nombre des racines réelles ou imaginaires de module inférieur à une certaine limite quand c_n est réel.

Enfin nous concluons que $\sum_0^\infty c_a x^{\tilde{\omega}_a} = 0$ n'a aucune racine algébrique, et que l'ensemble des racines transcendantes de ces équations a la puissance de continu.

II.

Théorème. Le nombre e ne peut être racine d'aucune des équations

$$(1) \qquad \sum_0^\infty c_a x^{\tilde{\omega}_a} = 0$$

quand $\frac{1}{c_n}$ croît suffisamment vite avec n (c_n rationnel, c_0 entier, $\tilde{\omega}_n = \frac{\chi_n}{q}$, où χ_n est un entier donné fonction de n et croissant, et q entier).

En effet, il suffit de suivre la même marche que dans une des démonstrations relatives au cas des équations algébriques.[2] Si l'on pose

---

[1] Nous y reviendrons ultérieurement plus en détail. Voir Bull. Soc. Math., t. 33, 1902, p. 147.

[2] Voir p. ex. JORDAN, Cours lithographié de l'École Polytechnique, 2ème division. Tous nos raisonnements restent vrais avec une très-légère modification pour le cas où certains des coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ seraient imaginaires.

(2) $$f(x) = \frac{x^{p-1}\left(x - \frac{\chi_1}{q}\right)^p \cdots \left(x - \frac{\chi_n}{q}\right)^p}{|(p-1)},$$

(p très-grand, 1[er] à q),

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \ldots,$$

on aura

(3) $$e^a F(0) = F(a) + e^a \int_0^a f(x) e^{-x} dx.$$

Donnant dans cette formule à a les valeurs $0 = \varpi_0, \varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n$ et additionnant les égalités obtenues en les multipliant par $c_0, c_1, \ldots, c_n$, on a, e étant supposé racine de (1),

(4) $$\sum_0^n c_a e^{\varpi_a} F(0) = \sum_0^n c_a F(\varpi_a) + \sum_0^n c_a e^{\varpi_a} \int_0^{\varpi_a} f(x) e^{-x} dx = -\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{\varpi_a} F(0).$$

Pour $x = 0$, $f(x)$ et ses $p-2$ 1[ères] dérivées s'annulent; les autres, sauf la 1[ère], qui est égale à $(-1)^{np} \frac{(\Pi\chi_n)^p}{q^{np}}$, où $\Pi\chi_n = \chi_1\chi_2\cdots\chi_n$, sont des multiples de p divisés par q^{np}, c. à d. de la forme $\frac{mp}{q^{np}}$.

Pour $x = \varpi_a \leqq \varpi_n$ $(a \neq 0)$, $f(x)$ est nul ainsi que ses $p-1$ 1[ères] dérivées; les autres sont des multiples de p divisés par une puissance de $q \leqq q^{np+p-1}$.

Ceci posé

(5) $$\sum_0^n c_a F(\varpi_a) = c_0\left(\frac{\lambda_0}{q^{np}} + \frac{m_0 p}{q^{np}}\right) + \sum_1^n \frac{s_n}{t_n} \frac{\text{mult. } p}{q^{np+p-1}},$$

si $\lambda_0 = (-1)^{np}(\Pi\chi_a)^p$, $c_n = \frac{s_n}{t_n}$.

Désignant par T_n le p. p. c. m. de $t_0 = 1, t_1, \ldots, t_n$, on aura

(6) $$\sum_0^n c_a F(\varpi_a) = \frac{\varepsilon}{T_n q^{np+p-1}},$$

avec $\varepsilon = c_0 \lambda_0 T_n q^{p-1} + m'p$; n étant donné, si p est assez grand pour ne pas diviser $c_0 \lambda_0 T_n q^{p-1}$, ε sera $\neq 0$, et $|\varepsilon| \geqq 1$, d'où

(7) $$\sum_0^n c_a F(\varpi_a) \geqq \frac{1}{T_n q^{np+p-1}}.$$

D'autre part, on a encore

$$(8)\qquad \left|\sum_0^n c_a e^{\bar\omega_a}\int_0^{\bar\omega_a} f(x)e^{-x}dx\right| \leqq e^{\bar\omega_n}\left(\sum |c_a|\right)\frac{\varpi_n^{p(n+1)}}{|(p-1)}.$$

On pourra toujours prendre p assez grand pour que le second membre soit

$$(9)\qquad <\frac{1}{4T_n q^{np+p-1}}.$$

Soit $p' = \varphi_n$ la plus petite des valeurs de p satisfaisant à cette condition.

Supposons maintenant que, dans $F(0)$, on fasse $p = p'$; $F(0)$ est une fonction bien déterminée ψ_n de n. Si l'on suppose la série $\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{\bar\omega_a}$ suffisamment convergente (ce qui est le cas quand c_a^{-1} croît suffisamment vite avec a), pour que

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{\bar\omega_a}\right| \leqq |\theta c_{n+1} e^{\bar\omega_{n+1}}|, \qquad (\theta \text{ fini}),$$

on devra avoir, d'après (4), (7) et (9),

$$(10)\qquad \frac{1}{T_n q^{np'+p'-1}} \leqq \frac{|\varepsilon|}{T_n q^{np'+p'-1}} \leqq |\theta c_{n+1} e^{\bar\omega_{n+1}} F(0)| + k e^{\bar\omega_n}\frac{\varpi_n^{p'(n+1)}}{|(p'-1)}$$

$$\leqq |\theta c_{n+1} e^{\bar\omega_{n+1}} F(0)| + \frac{1}{4T_n q^{np'+p'-1}},$$

ce qui est impossible dès que

$$(11)\qquad |\theta c_{n+1} e^{\bar\omega_{n+1}} \psi_n| \leqq \frac{1}{2T_n q^{np'+p'-1}}.$$

On pourra toujours choisir c_{n+1} assez petit pour qu'il en soit ainsi, quel que soit q, à partir d'une certaine valeur de n, par exemple quand $\varpi_n = \frac{ln}{q}$.

Corollaire I. Les puissances fractionnaires positives de e ne peuvent être racines des équations (1).

En effet, e n'est pas racine des équations traitées plus haut; il n'est dès lors pas racine des équations obtenues en remplaçant x par $y^{\frac{q}{s}}$; $e^{\frac{q}{s}}$ n'est donc pas racine des premières équations.

Nous croyons utile de donner un exemple précis d'application de ce théorème.

Prenons $c_n = \frac{\alpha_n}{t_n}$, α_n étant un entier tel que $|\alpha_n| \leqq A$ (A fini) et t_n étant divisible par $t_{n-1}, t_{n-2}, \ldots, t_1, t_0 = 1$: on a $T_n = t_n$. Posons $\varpi_n = \frac{ln}{q}$ (l entier donné), $p = (n+1)^{\mu(n+1)}$ (μ entier > 2): pour une infinité de valeurs de n, p ne divise pas

$$|c_0 \lambda_0 t_n q^{p-1}| = |c_0 l^{np} (\underline{|n})^p t_n q^{p-1}|,$$

si

(12) $$t_n = (\underline{|n})^{\lambda_n}, \qquad (\lambda_n \text{ entier}).$$

D'après (8) et (9) on prendra

$$e^{\frac{ln}{q}} k \left(\frac{ln}{q}\right)^{p(n+1)} \frac{p}{\underline{|p}} < \frac{1}{4 t_n q^{np+p-1}}, \qquad (k = \sum |c_\alpha|),$$

ce qui a lieu, a fortiori, si

$$\frac{e^{\frac{ln}{q}} kp (ln)^{p(n+1)}}{\left(\frac{p}{e}\right)^{p+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi e}} < \frac{kp}{\left(\frac{p}{e}\frac{1}{(ln)^{n+1}}\right)^p \left(\frac{1}{e}\right)^{ln}} \leqq \frac{kp}{\left(\frac{p}{e^2 (ln)^{n+1}}\right)^p} < \frac{q}{4 t_n},$$

puisque $p \geqq ln$, quand n est assez grand.

Or

$$\frac{p}{e^2 (ln)^{n+1}} = \frac{(n+1)^{\mu(n+1)}}{e^2 (ln)^{n+1}} > \frac{1}{e^2} \left(\frac{n^{\mu-1}}{l}\right)^{n+1},$$

et

$$\frac{4kp}{\left(\frac{p}{e^2 (ln)^{n+1}}\right)^p} < \frac{4kp e^{2p}}{\left(\frac{n^{\mu-1}}{l}\right)^{(n+1)p}} < \frac{1}{\left(\frac{n^{\mu-1}}{2l}\right)^{p(n+1)}},$$

car $4kpe^{2p} < 2^{(n+1)p}$.

Pour que (9) ait lieu il suffit finalement

$$t_n < \left(\frac{n^{\mu-1}}{2l}\right)^{p(n+1)}$$

ou, a fortiori,

(12') $$(\underline{|n})^{\lambda_n} = t_n < n^{(\mu-2)p(n+1)}$$

ou

$$n^{n\lambda_n} \leqq n^{(\mu-2)(n+1)^{\mu(n+1)+1}}$$

ou

$$n\lambda_n \leqq (\mu-2)(n+1)^{\mu(n+1)+1}.$$

Il suffira de prendre

$$(13) \qquad \lambda_n = (\mu-2)(n+1)^{\mu(n+1)}, \qquad \mu > 2$$

pour que (9) ait lieu.

Occupons-nous maintenant de la condition (11). On a d'abord

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{\frac{la}{q}}\right| \leqq \left|c_{n+1} e^{\frac{l}{q}(n+1)}\right| (1 + k_1 + k_1^2 + \ldots) = \frac{|c_{n+1}|\, e^{\frac{l(n+1)}{q}}}{1 - k_1}$$

$$\leqq 2\,|c_{n+1}|\, e^{\frac{l(n+1)}{q}}, \qquad \left(0 \leqq k_1 \leqq \frac{1}{2}\right)$$

dès que

$$\left|\frac{c_{a+1}}{c_a}\right| e^{\frac{l}{q}} = \left|\frac{a_{a+1}t_a}{a_a t_{a+1}}\right| e^{\frac{l}{q}} \leqq De^{\frac{l}{q}} \frac{t_a}{t_{a+1}} \leqq k_1 \leqq \frac{1}{2}, \text{[1]}$$

D étant le maximum du rapport $\left|\frac{a_{a+1}}{a_a}\right|$. Cette condition est toujours remplie pour $a \geqq n+1$, d'après (12) et (13). (11) devient

$$(14) \qquad 2\,|c_{n+1}|\, e^{\frac{l(n+1)}{q}} F(0) \leqq \frac{1}{2t_n q^{np+p-1}};$$

cherchons une limite supérieure de $F(0)$.

On a

$$\left|\underline{(p-1)}\, f(x)\right| = \left|x^{p-1}(x-\varpi_1)^p \ldots (x-\varpi_n)^p\right|,$$

$$\left|\underline{(p-1)}\, f'(x)\right| \leqq p \sum |f_1(x)|,$$

$$\left|\underline{(p-1)}\, f''(x)\right| \leqq p^2 \sum |f_2(x)|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left|\underline{(p-1)}\, f^{(k_2)}(x)\right| \leqq p^{k_2} \sum |f_{k_2}(x)|,$$

[1] Dans le cas ou quelques coëfficients c_a seraient nuls, une inégalité de même nature a lieu pour le rapport d'un terme au précédent. Notre raisonnement ne suppose donc pas $a_a \neq 0$, sauf en général.

$f_1, f_2, \ldots, f_{k_2}$ étant des produits de la forme

$$x^{\beta_0}(x-\varpi_1)^{\beta_1}\ldots(x-\varpi_n)^{\beta_n},$$

avec

$$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n \leqq p,$$

en nombre au plus égal à $n+1, (n+1)^2, \ldots, (n+1)^{k_2}$ respectivement. Chacun de ces produits est d'ailleurs, pour $x=0$, $\leqq l^{np}(\underline{|n})^p$ en valeur absolue, et

$$|F(0)|\,\underline{|(p-1)} \leqq l^{np}(\underline{|n})^p[1+p(n+1)+p^2(n+1)^2+\ldots$$
$$+p^{k_2}(n+1)^{k_2}+\ldots]$$

jusqu'à $k_2 = np+p-1$, d'où

(15) $$|F(0)| \leqq \frac{(\underline{|n})^p}{\underline{|(p-1)}}\, l^{np}\frac{[(n+1)p]^{np+p}-1}{p(n+1)-1}.$$

Il suffira, d'après (14), que

(16) $$\frac{t_{n+1}}{t_n} \geqq \lambda e^{\frac{l(n+1)}{q}} q^{np+p-1}\frac{(\underline{|n})^p}{\underline{|(p-1)}}\frac{[(n+1)p]^{np+p}-1}{p(n+1)-1},$$

λ étant une constante.

D'abord

$$\underline{|(p-1)}[p(n+1)-1] > \underline{|p},$$

$$\frac{\lambda q^{np+p-1}e^{\frac{l(n+1)}{q}}}{\underline{|p}} < 1,$$

si

$$\lambda q < \left(\frac{p}{e}\right)^p \frac{1}{e^{\frac{l(n+1)}{q}}\, q^{np+p}},$$

ou, puisque $\dfrac{l(n+1)}{q} < p$, si

$$\lambda q < \left(\frac{p}{e^2 q^{n+1}}\right)^p,$$

ce qui a lieu, puisque $p = (n+1)^{\mu(n+1)}$.

Il suffira donc d'après (16),

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} \geqq (\underline{|n})^p[(n+1)p]^{p(n+1)},$$

ou, a fortiori,

$$t_{n+1} \geqq [(n+1)^2 p]^{p(n+1)} t_n,$$

ou, d'après $t_n = (\underline{|n})^{\lambda^n}$, (12′) et $p = (n+1)^{\mu(n+1)}$,

$$t_{n+1} \geqq [(n+1)^2 p]^{p(n+1)} n^{(\mu-2)p(n+1)},$$

$$t_{n+1} \geqq ((n+1)^{\mu} p)^{p(n+1)},$$

$$\geqq (n+1)^{\mu(n+1)^1+\mu(n+1)} (n+1)^{\mu(n+1)^2+\mu(n+1)},$$

$$\geqq (n+1)^{\mu(n+1)^{\mu(n+1)+1}(n+2)}.$$

Il suffira alors

$$t_{n+1} = [\underline{|(n+1)}]^{\lambda_{n+1}} \geqq \left(\left(\frac{n+1}{e} \right)^{n+\frac{3}{2}} \sqrt{2\pi e} \right)^{\lambda_{n+1}} \geqq (n+1)^{\mu(n+2)(n+1)^{\mu(n+1)+1}},$$

ou, a fortiori,

$$(n+1)^{\left(n+\frac{3}{2}\right)\lambda_{n+1} - (n+1)^{\mu(n+1)+1}\mu(n+2)} \geqq e^{\left(n+\frac{3}{2}\right)\lambda_{n+1}}.$$

Ceci aura lieu pourvu que

$$\frac{1}{2}\left(n+\frac{3}{2}\right)(\mu-2)(n+2)^{\mu(n+2)} \geqq (n+1)^{\mu(n+1)+1}\mu(n+2),$$

ce qui a toujours lieu pour n assez grand quand $\mu \geqq 3$.

La condition (11) est donc alors remplie.

Nous en concluons le corollaire suivant:

Corollaire II. Les puissances entières ou fractionnaires de e ne sont pas racines des équations

$$\sum_0^{\infty} \frac{a_n}{(\underline{|n})^{(\mu-2)(n+1)^{\mu(n+1)}}} x^{\frac{ln}{q}} = 0$$

(l, q, μ entiers), a_n étant un entier limité, nul ou non, dès que $\mu \geqq 3$.

III.

Les résultats précédents, comme ceux relatifs aux nombres X,[1] s'étendent d'abord au cas des puissances négatives de e pour les équations (1), ensuite au cas des puissances négatives pour les équations $\sum c_n x^{\bar{\omega}_n} = 0$, dont le 1er membre converge pour $0 < x < k < 1$; enfin au cas des puissances positives ou négatives pour les équations

$$f_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_a x^{\bar{\omega}_a} = 0$$

convergentes dans un certain domaine, les c_a et les ϖ_a satisfaisant à certaines conditions de croissance et étant rationnels. Nous nous dispenserons de donner des exemples, et nous contenterons d'établir sommairement les théorèmes généraux.

1°. Pour le cas des puissances négatives il suffit de remarquer que (3) reste vrai quand α ou ϖ_a est négatif: la limite supérieure de $e^{\bar{\omega}_a}$ devient 1. Toutes les inégalités ou égalités précédentes restent vraies a fortiori sous cette réserve.

2°. Considérons les équations $f_1 = 0$, et soit $f_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_a e^{\bar{\omega}_a} = 0$, ϖ_a étant de la forme $\frac{\chi_a}{q}$, q entier, χ_a entier positif ou négatif. On prend pour $f(x)$

$$f(x) = \frac{x^{p-1}[(x-\varpi_1)\ldots(x-\varpi_n)(x-\varpi_{-1})\ldots(x-\varpi_{-n_1})]^p}{|\underline{(p-1)}}.$$

La formule (4) devient

$$F(0)\sum_{-n_1}^{n} c_a e^{\bar{\omega}_a} = \sum_{-n_1}^{n} c_a F(\varpi_a) + \sum_{-n_1}^{n} c_a e^{\bar{\omega}_a}\int_0^{\bar{\omega}_a} f(x)e^{-x}dx$$

$$= -\left[\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{\bar{\omega}_a} + \sum_{-(n_1+1)}^{-\infty} c_b e^{\bar{\omega}_b}\right]F(0).$$

Si

$$\lambda_0 = (-1)^{p(n+n_1)}(\Pi\chi_a)^p, \quad \text{avec } \varpi_a = \frac{\chi_a}{q},$$

[1] Journ. de Math., 1901, loc. cit.

on aura

$$\sum_{-n_1}^{n} c_a F(\bar\omega_a) = c_0\left(\frac{\lambda_0}{q^{(n+n_1)p}} + \frac{m_0 p}{q^{(n+n_1)p+p-1}}\right) + \sum_{-n_1}^{n} \frac{s_a}{t_a}\frac{\text{mult. } p}{q^{(n+n_1)p+p-1}},$$

$$\left|\sum_{-n_1}^{n} c_a F(\bar\omega_a)\right| \geqq \frac{\varepsilon}{q^{(n+n_1)p+p-1}\, T'_{nn_1}}, \qquad \varepsilon \geqq 1$$

si p est assez grand et convenablement choisi, T'_{nn_1} étant le plus petit commun multiple de $t_{-n_1}, t_{-n_1+1}, \ldots, t_0, t_1, \ldots, t_n$. Le raisonnement se continue de la même manière pour les puissances positives ou négatives.

3°. Restent les équations

$$\sum_0^{\infty} c_a x^{\bar\omega_a} = 0$$

dont le 1[er] membre converge pour $0 < x < k < 1$, et pour lesquelles nous ne pouvons évidemment traiter que le cas des puissances négatives. On raisonnera de la même manière; (4) devient

$$(16') \qquad \sum_0^{n} c_a e^{-\bar\omega_a} F(0) = \sum_0^{n} c_a F(-\bar\omega_a) + \sum_0^{n} c_a e^{-\bar\omega_a}\int_0^{-\bar\omega_a} f(x) e^{-x} dx,$$

$$= -\left(\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{-\bar\omega_a}\right) F(0),$$

avec

$$\underline{|(p-1)} f(x) = x^{p-1}(x+\bar\omega_1)^p \ldots (x+\bar\omega_n)^p.$$

On a, en faisant $x = 0$, puis

$$-x = \bar\omega_a \leqq \bar\omega_n = \frac{\chi_n}{q}$$

($a > 0$, $\bar\omega_a = \frac{\chi_a}{q}$, χ_a entier positif),

$$\sum_0^{n} c_a F(-\bar\omega_a) = c_0\left(\frac{\pm\lambda_0}{q^{np}} + \frac{m_0 p}{q^{np}}\right) + \sum_1^{n} c_a \frac{\text{mult. } p}{q^{np+p-1}},$$

$$\left|\sum_0^{n} c_a F(-\bar\omega_a)\right| \geqq \frac{1}{T_n q^{np+p-1}},$$

si $c_0 \lambda_0 T_n q^{p-1}$ n'est pas divisible par p.

D'autre part

$$\left|\sum_0^n c_a e^{-\bar\omega_a}\int_0^{-\bar\omega_a} f(x)e^{-x}dx\right| \leqq \left(\sum |c_a|\right)\frac{\bar\omega_n^{np+p}}{\underline{|p}} p.$$

On pourra, quelle que soit la loi de croissance de $\bar\omega_a$, prendre p assez grand pour que cette expression soit plus petite que $\frac{1}{4T_n q^{np+p-1}}$. De même on pourra prendre $\bar\omega_{n+1}$ assez grand pour que

$$(17)\qquad \left|\left(\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{-\bar\omega_a}\right)F(0)\right| < \frac{1}{4T_n q^{np+p-1}},$$

en prenant pour p la plus petite valeur p' satisfaisant aux conditions précédentes.

Si la loi de croissance de $\bar\omega_{n+1}$, qui est absolument arbitraire, est alors choisie de façon que ces inégalités soient remplies quel que soit n, pour n suffisamment grand, l'égalité (16') sera impossible.

Nous résumerons les résultats précédents dans les énoncés suivants:

Théorème I. Les puissances entières ou fractionnaires de e ne peuvent être racines d'aucune équation

$$\sum_0^{\infty} c_a x^{\bar\omega} = 0$$

quand $\frac{1}{c_n}$ croît suffisamment vite avec n, (c_a rationnel, $\bar\omega_n = \frac{\chi_n}{q}$, où χ_n est un entier donné fonction de n et croissant, et q entier) pour un mode de croissance donné de χ_n.

C'est le cas quand

$$\frac{1}{c_n} = \frac{(\underline{|n})^{(\mu-2)(n+1)^{\mu(n+1)}}}{a_n}$$

(a_n entier limité, nul ou non, $\mu \geqq 3$), $\bar\omega_n = \frac{ln}{q}$ (l, q entiers).

Théorème II. Il en est de même pour les équations

$$(18)\qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} c_a e^{\bar\omega_a} = 0$$

(ϖ_a étant positif ou négatif et de la forme $\frac{\chi_a}{q}$, χ_a et q entiers), pourvu que $\frac{1}{c_a}$ croisse suffisamment vite avec $|a|$, quand a est positif ou négatif, et que le mode de croissance de χ_a est donné.

Théorème III. Les puissances négatives rationnelles de e ne sont pas racines des équations

$$\sum_0^\infty c_n x^{\varpi_n} = 0 \tag{19}$$

dont le 1er membre converge pour $0 < x < k < 1$, quand ϖ_n croît suffisamment vite avec n, pour un mode de variation donné des c_n.

IV.

Lemme I. Soit

$$\sum_0^\infty c_a x^{\varpi_a} = \Phi(x) = 0 \tag{1}$$

une équation transcendante dont le 1[er] membre converge dans tout le plan ($\varpi_n = \frac{\chi_n}{q}$, χ_n entier). On pourra toujours, quel que soit n, supposer la loi de décroissance des c_n assez rapide pour que toute racine de

$$\sum_0^n c_a x^{\varpi_a} = \Phi_n(x) = 0 \tag{20}$$

diffère d'aussi peu qu'on veut d'une racine de (1), et pour que $\Phi_n(x) = 0$ n'ait que des racines distinctes.

En effet, soit x_1 une racine de $\Phi_n(x) = 0$. On a

$$\Phi(x) = \Phi_n(x) + \Psi(x).$$

$\Psi(x)$ est une série convergente, et, x_1 étant limité en fonction de n, on pourra toujours prendre c_{n+1} assez petit pour que $\Psi(x_1) < \varepsilon_{n+1}$.

Or

$$\Phi(x_1) = \Psi(x_1)$$

M étant le maximum de $\Phi(x)$ à l'intérieur d'un cercle de rayon R ayant le point x_1 comme centre dans le plan des x.

Pour une valeur de R donnée, $\Phi_n(x)$ a une limite supérieure M' dans le cercle en question, et l'on peut toujours prendre c_{n+1} assez petit pour que $M' \geqq 2|\Psi(x)|$ dans ce cercle. M est $\leqq \frac{3}{2}M'$, et il suffit pour que (22) et (23) aient lieu:

$$(23') \qquad \left|\frac{\Phi^{(k)}(x_1)}{\underline{|k}}\frac{R^{k+2}}{6M'}\right| \geqq |x - x_1|.$$

Or

$$(24) \qquad \Phi^{(k)}(x_1) = \Phi_n^{(k)}(x_1) + \Psi^{(k)}(x_1).$$

Soit $\Phi_n^{(k_1)}(x)$ la 1ère des dérivées de $\Phi_n(x)$ qui ne s'annule pas pour $x = x_1$: on peut supposer, si c_n est assez petit par rapport à c_{n-1}, $k_1 = 1$.

En effet, si non, $\Phi_n(x)$ aura une racine commune avec sa dérivée. Or

$$\Phi_n(x) = c_0 + c_1 x^{\frac{\chi_1}{q}} + \ldots + c_n x^{\frac{\chi_n}{q}}.$$

Posant $y = x^{\frac{1}{q}}$, on a

$$\Phi_n(x) = \varphi_n(y) = c_0 + c_1 y^{\chi_1} + \ldots + c_n y^{\chi_n},$$

et $\varphi_n(y)$ a en commun avec sa dérivée $\varphi_n'(y)$ la racine $y_1 = x_1^{\frac{1}{q}}$, car $\Phi_n'(x) = \varphi_n'(y)y'$ (on suppose $x_1 \neq 0$).

On en conclut que le résultant des 2 équations

$$\varphi_n'(y) = \chi_1 c_1 y^{\chi_1 - 1} + \ldots + \chi_n c_n y^{\chi_n - 1}$$

$$\chi_n \varphi_n(y) - y\varphi_n'(y) = \chi_n c_0 + (\chi_n - \chi_1) c_1 y^{\chi_1} + \ldots + (\chi_n - \chi_{n-1}) c_{n-1} y^{\chi_{n-1}},$$

doit être nul. Or ce résultant est, sous la forme de SYLVESTER, après suppression du facteur $y^{\chi_1 - 1}$ dans $\varphi_n'(y)$,

$$\begin{matrix} \chi_{n-1} \\ \text{lignes} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right. \quad \begin{matrix} \chi_n - \chi_1 \\ \text{lignes} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right. \left| \begin{matrix} \chi_1 c_1 & \ldots\ldots & \chi_n c_n & 0 \ldots \\ 0 & \chi_1 c_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \chi_n c_0 & \ldots\ldots & (\chi_n - \chi_1) c_1 & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{matrix} \right| = \Delta = 0.$$

c_n entre dans Δ à la puissance χ_{n-1} et son coefficient est

$$\chi_n^{\chi_{n-1}} \begin{vmatrix} \chi_n c_0 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & \chi_n c_0 \quad \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & \cdots\cdots \quad \chi_n c_0 \end{vmatrix} = \chi_n^{\chi_{n-1}} (\chi_n c_0)^{\chi_n - \chi_1}.$$

On en conclura

$$\Delta = (\chi_n c_0)^{\chi^n - \chi_1} (\chi_n c_n)^{\chi_{n-1}} + A_1 c_n^{\chi_{n-1}-1} + \ldots + A_{\chi_{n-1}} = 0.$$

Or, quand $c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_0$ et les χ_n sont donnés, cette équation en c_n a comme limite inférieure du module de ses racines une certaine fonction F_n de n; on peut toujours supposer $|c_n|$ plus petit que F_n. En d'autres termes on peut toujours supposer la loi de décroissance des cëfficients assez rapide pour que les équations $\Phi_n(x) = 0$ n'aient que des racines simples, c. à d. pour que $k_1 = 1$.

Ceci posé, on pourra supposer encore c_{n+1} assez petit pour que

$$|\Psi'(x_1)| < \theta |\Phi_n'(x_1)|,$$

θ étant une fraction $\leqq \frac{1}{2}$. Alors $\Phi'(x_1) \neq 0$, d'après (24), et, puisque $\Phi_n(x_1) = 0$,

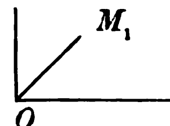
$$(25) \qquad |\Phi(x) - \Psi(x_1)| \geqq \frac{|x - x_1| |\Phi_n'(x_1)|}{2} (1 - \theta) \geqq \left| \frac{(x - x_1) \Phi_n'(x_1)}{4} \right| = \lambda,$$

d'après (22), car

$$\Phi'(x_1) \geqq |(1 - \theta) \Phi_n'(x_1)|.$$

L'inégalité (25) a lieu dès que c_{n+1} est assez petit et que (23') a lieu. Supposons x assez grand et c_{n+1} assez petit pour que

$$(26) \qquad |\Psi(x_1)| < \left| \frac{(x - x_1) \Phi_n'(x_1)}{8} \right| = \frac{\lambda}{2}.$$



D'après (25) et (26), soit M_1 le point représentatif de $u_1 = \Phi(x_1) = \Psi(x_1)$ dans le plan des u, si $\Phi(x) = u$. Le module de $\Phi(x) - \Phi(x_1)$ a une limite inférieure λ indé-

pendante de c_{n+1}; on pourra toujours prendre c_{n+1} assez petit pour que $\lambda \geqq 2OM_1$; il suffira de ne donner à x que des valeurs telles que

$$\left|\frac{(x-x_1)\Phi_n'(x_1)}{4}\right| \geqq 2\,|\Psi(x_1)|,$$

ou

$$(27) \qquad |x-x_1| \geqq \left|\frac{8\,\Psi(x_1)}{\Phi_n'(x_1)}\right|,$$

ce qui est possible, en prenant c_{n+1} assez petit pour que, d'après (23')

$$(28) \qquad \left|\Phi_n'(x_1)\frac{R^3}{6M'}\right| \geqq \left|\frac{16\,\Psi(x_1)}{\Phi_n'(x_1)}\right|.$$

Alors le module de $\Phi(x)$ est toujours $\geqq OM_1$.[1] D'après le théorème précité de Weierstrass complété par nous, les valeurs que prend $\Phi(x) - \Phi(x_1)$ quand x varie aux environs de x_1 comprennent toutes les valeurs représentées par les points situés à l'intérieur d'un cercle C_1 de rayon λ et de centre M_1 dans le plan des u, en particulier l'origine pour laquelle Φ a la valeur 0, et les valeurs x correspondant à (27) et (23') donnent des points dont aucun n'est situé à l'intérieur de C_1.

D'après (27) la valeur x' correspondante pour laquelle $\Phi(x') = 0$ est telle que

$$|x'-x_1| \leqq \left|\frac{8\,\Psi(x_1)}{\Phi_n'(x_1)}\right|;$$

$|x'|$ diffère de $|x_1|$ d'une quantité qui tend vers 0 avec c_{n+1}.

c. q. f. d.

On peut établir un lemme réciproque:

Lemme II. Tout étant posé comme au lemme I, on pourra toujours, quel que soit n, supposer la loi de décroissance des c_n assez rapide pour

[1] On peut encore conclure élégamment comme il suit en employant la terminologie de notre communication (Acad. Sc. Paris) du 3 mars 1902: une ligne de modules minima décroissants issue de x_1 dans le plan des x ne peut sortir du cercle de centre x_1 et de rayon déterminé par (27), puisque sur ce cercle tous les modules de $\Phi(x)$ sont supérieurs à celui de $\Phi(x_1)$. Par conséquent il y a un zéro de $\Phi(x)$ à l'intérieur de ce cercle. Voir encore J. Ec. Polyt., 1903, p. 75—95.

Nous indiquons plus loin d'autres applications des lemmes I et II.

qu'à toute racine ξ de $\Phi = 0$ de module inférieur au double de la limite supérieure du module des racines de $\Phi_n = 0$ corresponde une racine x_1 de $\Phi_n = 0$, la différence $\xi - x_1$ ayant un module η_n petit arbitraire, et pour que $\Phi = 0$ n'ait que des racines distinctes: η_n pourra être pris d'autant plus petit que c_{n+1} sera plus petit par rapport à c_n.[1]

En effet, on a

$$\Phi(\xi) = \Phi_n(\xi) + \Psi_n(\xi) = 0.$$

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de $\Phi_n(x)$; n étant donné, ainsi que $c_0, c_1, \ldots, c_n$, elles sont parfaitement déterminées. Par conséquent si l'on considère toutes les valeurs de x autres que celles comprises à l'intérieur de cercles de rayon η_n ayant $x_1, x_2, \ldots$ comme centres, pour ces valeurs $\Phi_n(x)$ a une limite inférieure L_n parfaitement déterminée pour toute valeur de η_n.

Pour toute valeur ξ_1 de ξ non comprise à l'intérieur de ces cercles on ne peut avoir $\Phi(\xi_1) = 0$ que si $|\Psi_n(\xi_1)|$ est supérieur à la limite en question: ces racines ξ_1 se divisent alors en 2 catégories: celles où $|\xi_1|$ est inférieur au double de la limite supérieure du module des racines de $\Phi_n(x) = 0$, et les autres.

Pour les premières

$$\Psi_n|\xi_1| \leqq |c_{n+1}||\xi_1|^{\omega_{n+1}} + \ldots.$$

On peut assigner à $|\Psi_n(\xi_1)|$ une limite supérieure aussi petite A_n qu'on veut pourvu que $|c_{n+1}|$ soit assez petit, c. à. d. telle que $A_n < L_n$, ce qui est impossible.

On peut également supposer les racines de $\Phi(x) = 0$ distinctes, si le mode de décroissance des $|c_n|$ est suffisamment rapide. En effet, si non, soit $\Phi(\xi) = 0$, $\Phi'(\xi) = 0$: il y a une racine x_1 de $\Phi_n(x) = 0$ telle que $|x_1 - \xi| < \eta_n$ et une x_1' de $\Phi_n'(x)$ telle que $|x' - \xi| < \eta_n'$. Or $c_0, c_1, \ldots, c_n$ étant donnés, on peut prendre c_{n+1} assez petit pour que $\eta_n + \eta_n' < \eta_n''$, η_n'' étant aussi petit qu'on veut. Or $|x_1' - x_1| \leqq \eta_n + \eta_n'$ est limité inférieurement en fonction de $c_0, c_1, \ldots, c_n$, ce qui est contradictoire avec ce qui précède.

Par suite, si le mode de décroissance des $|c_n|$ est suffisamment rapide, $\Phi(x) = 0$ n'a que des racines distinctes. c. q. f. d.

---

[1] Quand η_n est assez petit, à chaque racine de $\Phi_n(x) = 0$ en correspond une, et une seule de $\Phi(x) = 0$.

Ceci posé, nous allons établir ce théorème:

Théorème. Soit

$$\sum_0^\infty c_a x^{\varpi_a} = 0$$

une équation transcendante dont le 1[er] membre est convergent ($\varpi_a = \frac{\chi_a}{q}$; $\chi_a =$ entier croissant, q et χ_a entiers positifs). On pourra toujours, les χ_a étant donnés ainsi que q, supposer la loi de décroissance des coëfficients c_a assez rapide pour que π ne puisse en être racine.

En effet, on sait que MM. LINDEMANN, et, après lui, MM. GORDAN, HILBERT, HURWITZ, ROUCHÉ[1] ont établi que e^ζ n'était pas racine d'une équation algébrique à coëfficients entiers quand ζ était algébrique, par suite que π n'était pas algébrique. On peut alors chercher à étendre les résultats des paragraphes précédents aux nombres e^ζ, où ζ est un nombre algébrique ou racine d'une des équations (1), (18) ou (19). Nous nous contenterons d'établir, à titre d'exemple, le théorème pour π ou $i\pi$; il nous suffira de modifier trèslégèrement la méthode de M. HILBERT.

Supposons que $i\pi$ soit racine d'une équation

$$(1) \qquad \sum_0^\infty c_a x^{\varpi_a} = 0.$$

On pourra toujours prendre $|c_{n+1}|$ assez petit pour que les racines de

$$(29) \qquad \sum_0^n c_a x^{\varpi_a} = 0$$

diffèrent d'aussi peu qu'on veut d'autant de racines correspondantes de (1), dont $i\pi$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda_n}$ les λ_n racines de (29): nous formons[2]

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \ldots (1 + e^{\alpha_{\lambda_n}}) = 1 + e^{\beta_1} + \ldots + e^{\beta_N}$$
$$= a + e^{\beta_1} + \ldots + e^{\beta_M} = \varepsilon_n;$$

quand c_{n+1} est assez petit sans que n varie, il y a une des racines α, α_1 par exemple, qui est très voisine de $i\pi$, d'après l'hypothèse et les 2 lemmes

[1] V. Math. Ann. t. 43, 1893, p. 216, 220, 222 et ROUCHÉ, *Traité de Géométrie.*

[2] Nous conservons autant que possible les notations et la démonstration de M. HILBERT, à laquelle il conviendra de se reporter.

Ceci posé, n, c_0, c_1, ..., c_n étant donnés, choisissons ρ assez grand pour que abb_M soit 1er à $\rho + 1$, et ρ suffisamment grand pour que

$$\left|\frac{xK^\rho}{|\underline{\rho}}\right| < \frac{1}{4}$$

$|ab^{\rho M+M}b_M^{\rho+1} + \text{mult.}(\rho + 1)|$ est un entier $\neq 0$, et le 1er membre de (31) est $\geq \frac{3}{4}(|\underline{\rho})$. Donnant alors à ρ une valeur limitée en fonction de n et satisfaisant aux conditions ci-dessus, on pourra toujours prendre c_{n+1}, par suite ε_n assez petit pour que le second membre de (31) soit $< \frac{3}{4}(|\underline{\rho})$. L'égalité (31) est alors impossible, et nous obtenons le théorème annoncé.

V.

Le véritable caractère des théorèmes qui précèdent est surtout qu'ils donnent un moyen de calculer une limite supérieure de c_{n+1} en fonction de c_0, c_1, ..., c_n, de façon que les théorèmes énoncés aient lieu. Ils peuvent être regardés comme des cas particuliers, ou, plus exactement, des corollaires de théorèmes beaucoup plus généraux, mais dont l'application conduit aux mêmes raisonnements lorsqu'on veut déterminer la limite en question.

On peut établir, à titre d'exemple, la propriété générale suivante:

Théorème I. Soient t_1, t_2, ..., t_n, t_{n+1}, ... des entiers fonctions données de n telles que la série $\sum \frac{a_n}{t_n} x^n$ soit convergente quels que soient les entiers positifs ou négatifs a_0, a_1, ..., a_n, ..., quand $|a_0|$, $|a_1|$, ..., $|a_n|$, ... ont une limite supérieure finie A. Étant donné un nombre ζ quelconque non algébrique,[1] si t_1, t_2, ..., t_n, ... croissent suffisamment vite avec n, aucun nombre fonction algébrique à coëfficients entiers de ζ n'est racine d'une des équations $\sum_0^\infty \frac{a_n}{t_n} x^n = 0$.[2]

---

[1] Nous verrons plus loin (p. 326) qu'une propriété analogue a lieu quand ζ est algébrique.

[2] Si l'on se place au point de vue de la théorie des ensembles de M. CANTOR, on remarquera que ce théorème et tous les théorèmes précédents s'appliquent à un en-

En effet, considérons l'ensemble de celles de ces équations pour lesquelles $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n| \leqq A$, et les valeurs correspondantes de $\sum_0^n \frac{a_n}{t_n} x^n$ quand on donne à x toutes les valeurs possibles non algébriques racines des équations algébriques de degré $\leqq d$ dont les coefficients sont des polynomes en ζ à coëfficients entiers, de degré $\leqq \delta$, les coëfficients entiers dans chaque polynome ne dépassant pas δ_1. Ces valeurs sont en nombre limité; il en est par suite de même des valeurs correspondantes de mod. $\sum_0^n \frac{a_n}{t_n} x^n$, et celles-ci possèdent une limite inférieure fonction de n, A, d, δ et δ_1, $\varphi(n, A, d, \delta, \delta_1)$, $t_1, \ldots, t_n$ étant supposés donnés. On peut toujours supposer que l'on prenne pour φ une fonction non croissante de A, d, δ, δ_1, et l'on pourra écrire pour n assez grand, si l'on prend $A, d, \delta, \delta_1 \leqq n$,

$$\varphi(n, A, d, \delta, \delta_1) \geqq \varphi(n, n, n, n, n) \geqq \psi(n).$$

Si donc $\frac{a_{n+1}}{t_{n+1}}$ est suffisamment petit par rapport à $\psi(n)$, $\sum_0^\infty \frac{a_n}{t_n} x_n = 0$ est impossible pour toutes les valeurs en question.

Dès lors pour un mode de croissance suffisamment rapide de t_n, l'équation $\sum_0^\infty \frac{a_n}{t_n} x^n = 0$ ne peut avoir pour racines les valeurs x satisfaisant aux conditions précitées, quels que soient A, d, δ, δ_1. On peut en effet trouver toujours une valeur de n suffisamment grande pour que le raisonnement précédent soit applicable. c. f. q. d.

Remarque I. Une propriété semblable a lieu, quand on considère non plus les fonctions algébriques (à coëfficients entiers) d'un seul nombre ζ, mais l'ensemble des fonctions algébriques (à coëfficients entiers) d'un nombre limité de nombres $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ non algébriques. Le raisonnement est le même.

---

semble dénombrable (que nous appellerons ensemble D) de nombres; au contraire, les théorèmes relatifs aux nombres **X** s'appliquent à un ensemble de nombres ayant la puissance du continu (que nous appellerons ensemble C). Nous verrons plus loin qu'on peut établir des propriétés de même nature pour une infinité d'ensembles C analogues à celui des nombres X.

Remarque II. Quand on précise la nature du nombre ζ, on peut appliquer pour la détermination de la limite supérieure de c_{n+1} des principes tout semblables à ceux qui nous ont servi dans les 4 premier paragraphes.

Nous citerons à titre d'exemple l'ensemble des nombres $m + pe^{\frac{r}{q}}$, $\frac{r}{q}$, $m = \frac{r_1}{q_1}$, $p = \frac{r_2}{q_2}$ prenant toutes les valeurs rationnelles possibles.

Considérons l'équation

$$\sum_0^\infty c_a x^{la} = 0. \tag{32}$$

Si $m + pe^{\frac{r}{q}}$ en est racine quand r, r_1, r_2, q, q_1, q_2 sont $\leqq A$ en valeur absolue, on aura

$$\sum_0^\infty c_a \left(m + pe^{\frac{r}{q}}\right)^{la} = 0.$$

Soit $e^{\frac{r}{q}} = \varepsilon$; considérons

$$\sum_0^n c_a (m + p\varepsilon)^{la} = d_0 + d_1 \varepsilon + \ldots + d_{ln} \varepsilon^{ln} = \sum_0^{ln} d_a e^{a\frac{r}{q}}.$$

On aura, d'après (3)

$$\sum_0^{ln} d_a e^{a\frac{r}{q}} F(0) = \sum_0^{ln} d_a F\left(a\frac{r}{q}\right) + \sum_0^{ln} d_a e^{a\frac{r}{q}} \int_0^{a\frac{r}{q}} f(x) e^{-x} dx$$

$$= - \sum_{n+1}^\infty c_a (m + p\varepsilon)^{la} F(0).$$

On prendra ici

$$f(x) = \frac{x^{p_1 - 1} \left[x - \frac{r}{q}\right]^{p_1} \ldots \left[x - \frac{rln}{q}\right]^{p_1}}{\underline{|(p_1 - 1)}},$$

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \ldots.$$

La marche à suivre est dès lors la même que dans le cas où $p = 1$. Il en résulte que pour

$$c_{n+1} < \varphi(A, c_0, c_1, \ldots, c_n)$$

l'équation (32) est impossible: elle le sera a fortiori si $c_{n+1} < \varphi(n, c_0, c_1, \ldots, c_n)$ pour n assez grand, ce qui est toujours possible; φ est une fonction que les formules précédentes permettent de déterminer. On en déduira que, pour un mode de décroissance suffisamment rapide de c_n, aucun des nombres $m + pe^{\frac{r}{q}}$ n'est racine de (32) quel que soit A.

Ce qui précède ne donne, pour chaque nombre ζ non algébrique, qu'un ensemble D de nombres qui ne sont pas racines d'équations de la forme $\sum_0^\infty c_n x^n = 0$. Mais on peut établir pour tout nombre ζ, algébrique ou non, l'existence d'une infinité d'ensembles C jouissant de propriétés analogues: nous avons déjà indiqué ce théorème dans le cas où ζ est un nombre entier ordinaire[1] (nombres X). Nous allons voir que la même propriété a lieu quand ζ est algébrique ou transcendant.

Soit Y un nombre quelconque, ζ un autre nombre > 1, X_1 la partie entière de Y; on pourra écrire

$$Y = X_1 + \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 < 1.$$

Posons

$$\varepsilon_1 = \frac{a_1 + \varepsilon_2}{\zeta}, \quad \varepsilon_2 < 1, \ a_1 \text{ entier } < \zeta;$$

on aura

$$\varepsilon_2 = \frac{a_2 + \varepsilon_3}{\zeta}, \quad \varepsilon_3 < 1, \ a_2 \text{ entier } < \zeta$$

. . . .

Finalement on mettra Y d'une seule manière sous la forme

$$Y = X_1 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \ldots;^2$$

---

[1] loc. citat.

[2] Il en résulte en particulier que tout nombre ζ non algébrique satisfait à une infinité d'équations transcendantes à coëfficients rationnels. Mais, pour $\zeta > 1$ ces équations présentent un point singulier essentiel à l'origine. Pour $\zeta < 1$, il faudrait poser $\zeta = \frac{1}{\zeta'}$ et on aurait un développement analogue: ζ est alors effectivement racine d'une infinité d'équations $A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n + \ldots = 0$ à coëfficients rationnels ou entiers.

on aura

$$\varepsilon_1\zeta = \alpha_1 + \varepsilon_2 < \zeta, \qquad \alpha_1 \leqq E(\zeta),$$
$$\varepsilon_2\zeta = \alpha_2 + \varepsilon_3 < \zeta, \qquad \alpha_2 \leqq E(\zeta),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots$$

On arrive ainsi à représenter tout nombre dans un *système de numération de base quelconque non entière,* et l'on peut se proposer de voir si l'on ne peut obtenir pour ce système des théorèmes analogues à ceux que nous avons obtenus pour les nombres X.

Considérons l'ensemble des nombres

$$(33) \qquad Y = X_1 + \frac{\alpha_1}{\zeta^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\alpha_l}{\zeta^{\psi_l}} + \ldots,$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \ldots$ pouvant avoir toutes les valeurs entières positives ou négatives $\leqq E(\zeta)$ en valeur absolue. Quels que soient $\psi_1, \ldots, \psi_l, \ldots$, cet ensemble a la puissance du continu:[1] c'est un ensemble C.

Prenons alors une équation

$$(34) \qquad \sum_0^\infty c_a x^{\tilde{\omega}_a} = 0$$

algébrique ou transcendante (ϖ_a entier). Peut-on avoir $\sum_0^\infty c_a Y^{\tilde{\omega}_a} = 0$? Nous poserons

$$Y = X_1 + \sum_0^l \frac{\alpha_b}{\zeta^{\psi_b}} + \sum_{l+1}^\infty \frac{\alpha_b}{\zeta^{\psi_b}} = A_l + \sum_{l+1}^\infty \frac{\alpha_b}{\zeta^{\psi_b}},$$

et il faudra

$$0 = c_0 + c_1\left(A_l + \sum_{l+1}^\infty\right)^{\tilde{\omega}_1} + \ldots + c_n\left(A_l + \sum_{l+1}^\infty\right)^{\tilde{\omega}} + \sum_{n+1}^\infty c_a\left(A_l + \sum_{l+1}^\infty\right)^{\tilde{\omega}_a},$$

ce qui peut s'écrire

$$(35) \qquad 0 = c_0 + c_1 A_l^{\tilde{\omega}_1} + \ldots + c_n A_l^{\tilde{\omega}} + B\sum_{l+1}^\infty + \sum_{n+1}^\infty c_a\left(A_l + \sum_{l+1}^\infty\right)^{\tilde{\omega}_a}.$$

ζ étant donné, ainsi que $\psi_1, \ldots, \psi_l$, $c_0, c_1, \ldots, c_n$, $A_l^{\tilde{\omega}_1}, \ldots, A_l^{\tilde{\omega}_n}$, sont limités en fonction de ψ_l et ϖ_n, quels que soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ et $X_1 \leqq$
On pourra alors toujours prendre c_{n+1} assez petit t ψ_{l+1} assez grand p

[1] Voir par ex. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 32.

que $\left|B\sum_{l+1}^{\infty}+\sum_{n+1}^{\infty}c_a\left(A_l+\sum_{l+1}^{\infty}\right)^{\bar{\omega}_a}\right|<\varepsilon_{n,l}$, $\varepsilon_{n,l}$ étant aussi petit qu'on veut. On devra donc avoir

$$M_{n,l}=|c_0+c_1A_l^{\bar{\omega}_1}+\ldots+c_nA_l^{\bar{\omega}_n})|<\varepsilon_{n,l}. \tag{36}$$

Ceci posé, si ζ est algébrique le 1er membre pourra parfaitement s'annuler. Mais s'il n'est pas algébrique, il en est différemment: soit donc ζ transcendant.

1°. Supposons que $c_{n+1}=c_{n+2}=\ldots=0$, c. à. d. que (34) soit une équation algébrique: $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont des entiers que l'on peut supposer $\leqq d$. Le 1er membre $M_{n,l}$ de (36), pour toute valeur donnée de ζ, est limité inférieurement en fonction de d, n, ψ_l. On aura

$$M_{n,l}\geqq\varphi_1(d, n, \psi_l, A),$$

φ_1 étant une fonction de A, d, n, ψ_l qu'on peut toujours supposer non croissante.

Si l'on prend $l\geqq A$, $l\geqq d$, $l\geqq n$, on aura a fortiori

$$M_{n,l}\geqq\varphi_1(l, l, \psi_l, l).$$

Prenant alors ψ_{l+1} assez grand pour que

$$\varepsilon_{n,l}<\varphi_1(l, l, \psi_l, l)$$

quand $n<l$, ce qui est toujours possible, on voit que (36) est impossible.

Par conséquent on peut toujours trouver un mode de croissance assez rapide des ψ_l pour que, à partir d'une certaine valeur de l, quelles que soient l'équation algébrique (34) et la valeur X_1, (36) soit impossible. Y ne peut alors être racine d'aucune équation algébrique.

2°. Supposons que (34) soit une équation transcendante, et prenons

$$c_0=a_0, \qquad c_1=\frac{a_1}{t_1}, \quad \ldots, \quad c_n=\frac{a_n}{t_n}, \quad \ldots, \qquad (a_i \text{ entier}).$$

Posons $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|\leqq A$ (A entier donné). Pour toutes les valeurs de $a_0, \ldots, a_n$ satisfaisant à cette condition, quand $t_1, \ldots, t_n$ sont donnés, on peut encore assigner, quand ζ est donné et non algébrique, une limite inférieure de $M_{n,l}$ en fonction de A, l et n,

$$M_{n,l}\geqq\varphi_2(A, n, l),$$

φ_2 n'étant pas une fonction croissante de A, n, l. Si l'on prend par exemple $n = l \geqq A$, on aura

$$M_{n,n} \geqq \varphi_2(n, n, n).$$

On pourra toujours prendre ψ_{l+1} et $a_{n+1}^{-1} t_{n+1}$ assez grands pour que $\varepsilon_{n,n} < \varphi_2(n, n, n)$, et (36) sera alors impossible. Si le mode de croissance des t_n et ψ_n est suffisamment rapide, il y aura impossibilité quel que soit A.

3°. Supposons encore que (34) soit une équation transcendante: pour les valeurs particulières de ζ de la forme e, ou $e^{\frac{r}{q}}$ ($\frac{r}{q}$ rationnel) ou π, on pourra encore probablement trouver des limites inférieures précises de ψ_{l+1} et t_{n+1} par les mêmes procédés que ceux employés par nous dans l'extension des démonstrations de MM. Hurwitz et Hilbert. Nous n'insistons pas.

Il nous reste à considérer le cas où ζ est algébrique.

1°. Si (34) est une équation algébrique $f(x) = 0$, qu'on peut supposer irréductible, on a aux environs d'une racine $|f'(x)| < M$. Si $Y = A_l + \varepsilon_l$ est une racine, $f(A_l + \varepsilon_l) = 0 = f(A_l) + \varepsilon_l \mu$

$$|\varepsilon_l| = \left|\frac{f(A_l)}{\mu}\right| > \frac{|f(A_l)|}{kM},$$

M et k étant finis.

D'abord on peut supposer $f(A_l) \neq 0$: en effet le module de la différence entre 2 racines de $f(x) = 0$ est limité inférieurement en fonction du degré n de $f(x)$ et de d, si tous les coëfficients de $f(x)$ sont $\leqq d$; il suffira de prendre

$$\psi_{l+1} > \chi(n, d),$$

pour que $f(A_l) \neq 0$. Alors $\frac{|f(A_l)|}{kM}$ est limité inférieurement en fonction de n, d, l, et $|\varepsilon_l|$ aussi: par suite on voit que, quelle que soit l'équation algébrique irréductible à coëfficients entiers considérée, si le mode de croissance de ψ_l est suffisamment rapide il y aura toujours une valeur de l pour laquelle notre raisonnement sera applicable, et Y ne sera pas algébrique.

2°. Si (34) est une équation transcendante, pour toute valeur de A_l, $M_{n,l}$ ou $M_{n+1,l}$ est $\neq 0$. Le raisonnement qui nous a servi pour le cas où ζ est transcendant est à peu près applicable. On aura

$$\text{soit } |\varepsilon_{n,l}| > M_{n,l} \geqq \varphi_{n,l}, \qquad \text{si } M_{n,l} \neq 0,$$

$$\text{soit } |\varepsilon_{n+1,l}| > M_{n+1,l} \geqq \varphi_{n+1,l}, \qquad \text{si } M_{n,l} = 0.$$

Si le mode de croissance des $\frac{1}{c_n}$ et des ψ_l est suffisamment rapide, on voit successivement que ces 2 inégalités sont impossibles.

Les résultats ci-dessus peuvent être résumés comme il suit:

Théorème. Soit

$$Y = X_1 + \frac{a_1}{\zeta^{\psi_1}} + \ldots + \frac{a_l}{\zeta^{\psi_l}} + \ldots,$$

($|a_1|, \ldots, |a_l|, \ldots$ entiers $\leqq E(\zeta)$) un nombre exprimé dans le système de numération de base ζ ($|\zeta| > 1$), algébrique ou non, et

$$(34) \qquad \sum_0^\infty c_a x^{\varpi_a} = 0, \qquad (\varpi_a \text{ entier}),$$

une équation algébrique ou transcendante: ζ étant donné, pour un mode de croissance suffisamment rapide de ψ_l avec l: 1°, Y ne peut être algébrique; 2°, si $c_0 = a_0$, $c_1 = \frac{a_1}{t_1}, \ldots, c_n = \frac{a_n}{t_n}, \ldots$, ($|a_1|, \ldots, |a_n|, \ldots$ entiers limités quelconques), Y ne peut être racine de (34) quand t_n croît suffisamment vite avec n.

Remarque. Il est bien évident que si, au lieu d'un nombre transcendant ζ, on considère k nombres $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$, on pourra encore montrer par les mêmes procédés qu'aucun des nombres Y correspondant à $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ ne peut être solution d'une équation algébrique ou de $\sum_0^\infty \frac{a_n}{t_n} x^{\varpi_n} = 0$, quand ψ_l et t_n croissent suffisamment vite avec l et n. Dans le cas particulier où $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ seraient liés par certaines relations, par exemple si ce sont des puissances rationnelles de ζ_1, ou des fonctions algébriques à coëfficients entiers de ζ_1, on pourra aller un peu plus loin. Supposons par exemple que $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ soient l'ensemble des racines des équations algébriques de degré $\leqq d$ dont les coëfficients sont des polynomes à coëfficients entiers en ζ_1 de degré $\leqq \delta$, les coëfficients de chaque polynome ne dépassant pas δ_1 en valeur absolue: k est limité en fonction de d, δ, δ_1. Les limites inférieures de ψ_{l+1} et t_{n+1} sont fonctions non décroissantes de

d, ∂ et ∂_1; pour l et n assez grands avec $n = l$, par exemple, on pourra prendre comme limite inférieure une fonction de n seul. On pourra donc encore trouver un mode de croissance suffisamment rapide de ψ_l et t_n pour que le théorème précédent reste vrai quand ζ est un quelconque des nombres fonctions algébriques de ζ_1. Donc

Corollaire. Le théorème précédent reste vrai pour l'ensemble des nombres Y obtenus en donnant à ζ toutes les valeurs des fonctions algébriques d'un même nombre ζ_1.

Il existe ainsi des nombres, les racines des équations algébriques ou des équations $\sum_0^\infty c_n x^{\bar{\omega}_n} = 0$ (le mode de croissance des $\bar{\omega}_n$ étant donné et c_n croissant assez vite avec n), qui, mis sous la forme

$$X = X_1 + \frac{a_1}{\zeta^{\psi_1}} + \ldots + \frac{a_l}{\zeta^{\psi_l}} + \ldots$$

X_1 entier, $|a_1|, \ldots, |a_l|, \ldots \leqq |\zeta|$ ne peuvent jamais présenter un mode de croissance des ψ_l qui soit trop rapide, quand on prend successivement pour ζ toutes les valeurs des fonctions algébriques d'un même nombre transcendant ζ_1 arbitraire, mais donné.

VI.

Nous avons rencontré au § IV une propriété algébrique des équations transcendantes $\sum_0^\infty c_a x^{\bar{\omega}_a} = 0$. Nous ne croyons pas inutile [1] d'étudier à ce point de vue quelques propriétés algébriques de ces équations et de montrer qu'elles forment un cas limite très-voisin de celui des équations algé-

[1] Nous nous contentons d'établir les propriétés relatives à $\sum_0^\infty c_a x^{\bar{\omega}_a} = 0$. On a pour les équations (18), (19) et plus généralement

$$\sum_0^\infty c_a x^{\bar{\omega}_a} + \sum_0^\infty \frac{c_a^0}{x^{\bar{\omega}_a^0}} + \ldots + \sum_0^\infty \frac{c_a^k}{(x - \beta_k)^{\bar{\omega}_a^k}} = 0$$

des résultats tout-à-fait analogues. Nous y reviendrons ultérieurement. (Voir Bull. Soc. Math., 1902, loc. cit.)

briques, en particulier des équations binômes. Les résultats précédents, joints à ceux de LIOUVILLE et à ceux que nous avons obtenus dans une note antérieure déjà citée, l'établissent amplement au point de vue arithmétique.

Nous allons d'abord établir le théorème suivant:

Théorème I. Soit l'équation transcendante

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty c_a x^{\varpi_a} = 0 \quad \left(\varpi_a = \frac{\chi_a}{q},\ q,\ \chi_a \text{ entiers}\right),$$

les c_a décroissant suffisamment vite quand les ϖ_a sont donnés. Si les c_n sont tous réels et si $\Phi_n(x) = 0$ a $2p$ racines imaginaires et $\varpi_n q - 2p$ racines réelles, $\Phi(x) = 0$ a $2p$ racines imaginaires et $\varpi_n q - 2p$ racines réelles correspondantes distinctes.

Nous savons déjà que les racines de $\Phi(x)$ dont le module ne dépasse pas le double de la limite supérieure du module des racines de $\Phi_n(x) = 0$ diffèrent de racines correspondantes de $\Phi_n(x) = 0$ d'aussi peu qu'on veut, et réciproquement pourvu que $|c_{n+1}|$ soit suffisamment petit par rapport à c_n.

Soit $\alpha + \beta i$ une racine imaginaire de $\Phi(x)$: quand $|c_{n+1}|$ tend vers 0, $\alpha + \beta i$ tend vers une racine $a + bi$ de $\Phi_n(x)$. Si $b \neq 0$, on a évidemment, quand $|c_{n+1}|$ suffisamment petit, $\beta \neq 0$. Si $b = 0$, il y aura 2 racines $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$ tendant vers a: alors $\Phi(\alpha + \beta i) - \Phi(\alpha - \beta i)$ est nul, et, quand β tend vers 0 il en résulte $\Phi'(a) = \Phi_n'(a) = 0$ contrairement à ce qu'on a vu. Donc une racine imaginaire de $\Phi(x)$ ne peut correspondre qu'à une racine imaginaire de $\Phi_n(x)$. Il y a réciprocité, car soit α une racine réelle de $\Phi(x)$; quand c_{n+1} tend vers 0 elle a évidemment pour limite une racine réelle de $\Phi_n(x)$.

Le nombre des racines de $\Phi_n(x)$ étant évidemment $\varpi_n q$, le théorème en résulte immédiatement.

Les équations $\Phi(x) = 0$, que nous appellerons des *équations pseudo-* ou *quasialgébriques,* peuvent donc être étudiées au point de vue du nombre de leurs racines réelles comme les équations algébriques. Dans ce but nous considérerons seulement le cas où ϖ_n est entier, le cas où $\varpi_n = \frac{\chi_n}{q}$ s'en déduisant facilement, et nous établirons d'abord le lemme suivant:

Lemme. L'équation $\Phi_n(x) = 0$, où les c_n sont réels, a les $\varpi_n - \varpi_{n-1}$ racines $\xi_1(1+\varepsilon_1)$, $\xi_2(1+\varepsilon_2)$, ..., $\xi_{\varpi_n-\varpi_{n-1}}(1+\varepsilon_{\varpi_n-\varpi_{n-1}})$, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\varpi_n-\varpi_{n-1}}$ étant les racines de $c_n x^{\varpi_n-\varpi_{n-1}} + c_{n-1} = 0$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\varpi_n-\varpi_{n-1}}$ tendant vers o quand c_n tend vers o, $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ étant donnés. Les racines correspondantes de $\Phi(x) = 0$ sont de la même forme.

En effet, soit

$$c_n \xi^{\varpi_n-\varpi_{n-1}} + c_{n-1} = 0,$$

$$\begin{aligned} O = \Phi_n[\xi(1+\varepsilon)] &= c_n \xi^{\varpi_n}(1+\varepsilon)^{\varpi_n} + c_{n-1}\xi^{\varpi_{n-1}}(1+\varepsilon)^{\varpi_{n-1}} + \ldots \\ &= c_n \xi^{\varpi_n}(\varpi_n \varepsilon + C^2_{\varpi_n}\varepsilon^2 + \ldots) + c_{n-1}\xi^{\varpi_{n-1}}(\varpi_{n-1}\varepsilon + C^2_{\varpi_{n-1}}\varepsilon^2 + \ldots) \\ &\quad + c_{n-2}\xi^{\varpi_{n-2}}(1+\varepsilon)^{\varpi_{n-2}} + \ldots \\ &= \varepsilon(\varpi_{n-1} - \varpi_n)c_{n-1}\xi^{\varpi_{n-1}} + \varepsilon^2 c_{n-1}\xi^{\varpi_{n-1}} A + c_{n-2}\xi^{\varpi_{n-2}}(1+\varepsilon)^{\varpi_{n-2}} + \ldots; \end{aligned}$$

A ne dépend que de ϖ_n, ϖ_{n-1} et ε et reste fini quand ε tend vers zéro.

Cette équation donne alors

$$\varepsilon = \frac{c_{n-2}\xi^{\varpi_{n-2}}(1+\varepsilon)^{\varpi_{n-2}} + \ldots}{(\varpi_n - \varpi_{n-1})c_{n-1}\xi^{\varpi_{n-1}} - \varepsilon c_{n-1}\xi^{\varpi_{n-1}} A}$$

et est satisfaite par une valeur de ε qui tend vers o quand c_n tend vers o, car ξ croît alors indéfiniment et $\varpi_{n-1} > \varpi_{n-2}$.

Il n'y a plus qu'à appliquer les lemmes du § IV.

c. q. f. d.

On en conclut de suite le théorème suivant:

Théorème II. Soit l'équation

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty c_n x^{\varpi_n} = 0$$

où ϖ_n est entier: si le mode de décroissance des c_n est suffisamment rapide, on obtiendra le nombre des racines réelles ou imaginaires de $\Phi(x) = 0$ qui correspondent à celles de $\Phi_n(x) = 0$, et même une valeur approchée de ces racines en déterminant celui des équations binômes [1]

$$c_n \xi^{\varpi_n-\varpi_{n-1}} + c_{n-1} = 0, \qquad c_{n-1}\xi^{\varpi_{n-1}-\varpi_{n-2}} + c_{n-2} = 0, \ \ldots,$$

---

[1] On a ici un exemple net, *dans un cas limite*, de l'influence de la croissance des coëfficients d'une fonction entière sur la croissance des racines.

et les racines réelles ou imaginaires de ces équations: à chacune de ces dernières correspond une racine de $\Phi(x)$ qui est en même temps réelle ou imaginaire.

En effet, soit $\xi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ une racine imaginaire de

$$c_n x^{\bar\omega_n - \bar\omega_{n-1}} + c_{n-1} = 0.$$

On a

$$\cos\varphi = \cos\frac{k\pi}{\varpi_n - \varpi_{n-1}}, \qquad \sin\varphi = \sin\frac{k\pi}{\varpi_n - \varpi_{n-1}},$$

k étant un entier pair ou impair suivant le signe de $c_n c_{n-1}$. Pour une valeur donnée de n et de ϖ_n, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ sont finis et $\xi(1+\varepsilon)$ est imaginaire avec ξ quand c_n est suffisamment petit. Si ξ est réel, $\xi(1+\varepsilon)$ a son module compris entre $\frac{\xi}{k}$ et $k\xi$ (k fini > 1, et voisin de 1). D'autre part, si $c_n c_{n-1} < 0$, il y a une racine réelle quand $\varpi_n - \varpi_{n-1}$ est impair, $\sqrt[\bar\omega_n - \bar\omega_{n-1}]{\frac{-c_{n-1}}{c_n}}$; il y en a 2 quand $\varpi_n - \varpi_{n-1}$ est pair, $\pm\sqrt[\bar\omega_n - \bar\omega_{n-1}]{\frac{-c_{n-1}}{c_n}}$. Si $c_n c_{n-1} > 0$ il n'y en a qu'une, si $\varpi_n - \varpi_{n-1}$ est impair, $\sqrt[\bar\omega_n - \bar\omega_{n-1}]{\frac{-c_{n-1}}{c_n}}$.

Or, si $k > 1$,

$$\Phi_n\left(\frac{\xi}{k}\right) = c_n\left(\frac{\xi}{k}\right)^{\bar\omega_n} + c_{n-1}\left(\frac{\xi}{k}\right)^{\bar\omega_{n-1}} + \ldots$$

$$= c_{n-1}\,\xi^{\bar\omega_{n-1}}\left(\frac{1}{k^{\bar\omega_{n-1}}} - \frac{1}{k^{\bar\omega_n}}\right) + c_{n-2}\frac{\xi^{\bar\omega_{n-2}}}{k^{\bar\omega_{n-2}}} + \ldots,$$

$$\Phi_n(k\xi) = c_{n-1}\,\xi^{\bar\omega_{n-1}}(k^{\bar\omega_{n-1}} - k^{\bar\omega_n}) + c_{n-2}(k\xi)^{\bar\omega_{n-2}} + \ldots;$$

$\Phi_n\left(\frac{\xi}{k}\right)$ et $\Phi_n(k\xi)$ sont de signes contraires, et $\Phi_n(x) = 0$ a une racine réelle au moins comprise entre $\frac{\xi}{k}$ et $k\xi$, quel que soit le signe de ξ.

Si l'on considère alors les racines réelles distinctes ξ', ξ'', ... des équations binômes

$$c_n\,\xi^{\bar\omega_n - \bar\omega_{n-1}} + c_{n-1} = 0, \qquad c_{n-1}\,\xi^{\bar\omega_{n-1} - \bar\omega_{n-2}} + c_{n-2} = 0, \quad \ldots,$$

on peut toujours choisir un mode de décroissance assez rapide des coëfficients c_n pour que parmi les quantités ξ', ξ'', ... il n'y en ait pas deux

comprises entre $k\xi'$ et $\frac{\xi'}{k}$, $k\xi''$ et $\frac{\xi''}{k}$, ..., ces intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres. Il en résulte qu'aux $\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_{n-1}$ racines de

$$c_n x^{\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_{n-1}} + c_{n-1} = 0$$

correspondront $\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_{n-1}$ racines de Φ voisines et en même temps réelles ou imaginaires.

Le théorème est alors vrai pour $\Phi_1(x) = 0$; on sait que $\Phi_2(x)$ a $\bar{\omega}_1$ racines vosines de celles de Φ_1 et $\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1$ voisines de celles de

$$c_2 \xi^{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1} + c_1 = 0.$$

Le théorème est vrai pour Φ_2; et ainsi de suite. c. q. f. d.

Remarque I. Il serait intéressant d'étendre ce qui précède aux séries de la forme $\sum_0^\infty c_n P_n$, où les P_n sont des polynomes de degrés $\bar{\omega}_n$ croissants ou des fractions rationnelles.

Remarque II. On pourrait aussi considérer les équations $\sum_0^\infty c_n x^{\bar{\omega}_n} = 0$, où les $k+1$ 1ers coëfficients sont absolument arbitraires: les transcendantes correspondantes ont pour limite les racines des équations algébriques générales quand c_{k+1}, c_{k+2}, ..., tendent vers zéro.

Théorème III. Si le mode de décroissance des c_n à partir d'un quelconque d'entre eux est suffisamment rapide, l'équation $\Phi(x) = 0$ n'a aucune racine algébrique.

Supposons que $\Phi(x) = 0$ ait une racine commune ω avec une équation algébrique donnée irréductible

$$f(x) = A_0 x^p + \dots + A_p.$$

Nous supposons ici que $|A_0|, |A_1|, \dots, |A_p|$ et p sont des entiers $\leqq$ A étant donné.

$\Phi_n(\omega)$ diffère de 0 d'une quantité qui est d'autant plus petite c_{n+1} est plus petit par rapport à $c_0, c_1, \dots, c_n$, et tend vers 0 quand tend vers 0. Cherchons le plus grand commun diviseur de $\Phi_{n-1}(x$ $f(x)$ d'une part, $\Phi_n(x)$ et $f(x)$ d'autre part, en supposant les $\bar{\omega}_n$ er et $\bar{\omega}_{n-1} \geqq p$. On a

$$\Phi_{n-1}(x) = Qf(x) + P_1, \qquad \Phi_n(x) = Q'f(x) + P'_1,$$
$$f(x) = Q_1P_1 + P_2, \qquad f(x) = Q'_1P'_1 + P'_2,$$
$$P_1 = Q_2P_2 + P_3, \qquad \dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots$$
$$P_{\lambda-1}(x) = Q_\lambda P_\lambda(x) + P_{\lambda+1}(x), \qquad P'_{\lambda'-1}(x) = Q'_{\lambda'}(x)P'_{\lambda'}(x) + P'_{\lambda'+1}(x),$$
$$P_\lambda(x) = Q_{\lambda+1}(x)P_{\lambda+1}(x), \qquad P'_{\lambda'}(x) = Q'_{\lambda'+1}(x)P'_{\lambda'+1}(x).$$

Donnant à x la valeur ω, on aura soit

$$\Phi_{n-1}(\omega) \neq 0, \quad \text{soit} \quad \Phi_n(\omega) \neq 0.$$

Si $\Phi_{n-1}(\omega) \neq 0$, le système précédent d'égalités donne $P_{\lambda+1}(\omega) \neq 0$ et

$$P_{\lambda+1}(\omega) = \psi(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, A_0, A_1, \dots, A_p, p).$$

ψ ne dépend pas de ω et est une constante, car l'équation $f(x) = 0$ étant irréductible, on ne pourra avoir $P_{\lambda+1}(x) \neq Cf(x)$ (C const.) que si $P_{\lambda+1}(x) =$ const., c. à. d. que si $\Phi_{n-1}(\omega) \neq 0$, et réciproquement.

Si $\Phi_n(\omega) \neq 0$, ce sera $P'_{\lambda'+1}(\omega)$ qui ne dépendra pas de ω.

Finalement on aura

$$\text{soit} \quad P_{\lambda+1} = \psi(c_0, \dots, c_{n-1}, \dots, A_p, p),$$
$$\text{soit} \quad P'_{\lambda'+1} = \chi(c_0, \dots, c_n, \dots, A_p, p),$$

ψ et χ étant des fonctions parfaitement déterminées pour un mode de croissance donné des $\varpi_1, \dots, \varpi_n, \dots$.

On aura alors

$$(37) \qquad \begin{cases} \text{soit} \quad P_{\lambda+1} \geqq \psi_1(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, A), \\ \text{soit} \quad P'_{\lambda'+1} \geqq \chi_1(c_0, c_1, \dots, c_n, A), \end{cases}$$

ψ_1 et χ_1 pouvant toujours être considérées comme des fonctions non croissantes de A.

Or si c_n est suffisamment petit par rapport à c_{n-1}, $\Phi_{n-1}(\omega)$, quand il n'est pas nul, est aussi petit qu'on veut, par suite aussi $P_1, P_2, \dots, P_{\lambda+1}$. On est alors conduit pour les valeurs de c_n inférieures à une certaine limite à l'impossibilité de la première des conditions (37). Ne donnant à c_n que ces valeurs, on voit encore que, si c_{n+1} est suffisamment petit, la 2ème des

conditions (37) est également impossible. Prenons alors $A = n$, et déterminons la suite des c_n de façon que toutes les conditions analogues à (37) soient vérifiées, on obtient le théorème en question, car quel que soit l'équation irréductible $f(x) = 0$, il existe toujours une valeur de n à partir de laquelle on peut raisonner comme ci-dessus. c. q. f. d.

Il est à remarquer que ce raisonnement laisse entièrement arbitraires les 1[ers] coëfficients $c_0, c_1, \ldots, c_k$, k étant arbitraire, mais donné. Si alors $|c_{k+1}|$ est suffisamment petit, et si les $|c_n|$ décroissent suffisamment vite pour $n \geqq k$, il y a ϖ_k racines de $\Phi(x) = 0$ aussi voisines que l'on veut des ϖ_k racines d'une équation algébrique à coëfficients rationnels absolument quelconques. Les nombres transcendants dont nous établissons ici l'existence peuvent donc être considérés comme ayant pour limite les nombres algébriques.

Enfin nous établirons encore le théorème suivant:

Théorème IV. Si le mode de décroissance des c_n à partir d'un quelconque d'entre eux est suffisamment rapide, l'ensemble des racines des équations $\Phi(x) = 0$ correspondantes renferme un ensemble qui a la puissance du continu et qui ne contient que des nombres transcendants tous distincts des nombres X.

Supposons que $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ aient une racine commune ω, et

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty c_n x^{\varpi_n} = 0, \qquad \Psi(x) = \sum_0^\infty c'_n x^{\varpi_n} = 0.$$

Cherchons le plus grand commun diviseur de $\Phi_n(x)$ et $\Psi_n(x)$. On a

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) &= P\Psi_n(x) + P_1, \\ \Psi_n(x) &= Q_1 P_1 + P_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{\lambda-1} &= Q_\lambda P_\lambda + P_{\lambda+1}, \\ P_\lambda &= Q_{\lambda+1} P_{\lambda+1}(x). \end{aligned}$$

Supposons ω de module $< A$. On a

$$\Phi(\omega) = \Phi_n(\omega) + \varphi_n(\omega), \qquad \Psi(\omega) = \Psi_n(\omega) + \psi_n(\omega).$$

On peut toujours prendre c_{n+1} et c'_{n+1} assez petits pour que $|\varphi_n(\omega)|$ et $|\psi_n(\omega)|$ soient aussi petits que l'on veut, plus exactement soient inférieures à ε donné a priori: $|P_{\lambda+1}(\omega)|$ doit alors être $< \varepsilon_1$, ε_1 étant aussi petit qu'on veut.

Deux cas sont à distinguer: Φ_n et Ψ_n ont un diviseur commun ou n'en ont pas. S'ils n'en ont pas, le module de leur résultant $P_{\lambda+1}$ a une limite inférieure L: en prenant $L > \varepsilon_1$ on a une impossibilité. Donc ils en ont un et leur résultant est constamment nul quel que soit n. Par suite:

Si le mode de décroissance des $|c_n|$, dès que $n > k$, est suffisamment rapide, deux des équations $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ ne peuvent avoir une racine commune de module $< A$ (A fini) que s'il en est de même de $\Phi_n = 0$ et $\Psi_n = 0$, dès que $n > k$.

Considérons d'abord les équations

(38) $$\Phi(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = 0.$$

Prenons

$$c_1 = \frac{a_1}{t_1}, \qquad c_2 = \frac{a_2}{t_2}, \quad \ldots,$$

$t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ nombres réels croissants déterminés, avec

$$t_1 = \frac{1}{10}, \qquad t_n \geqq 10^n, \qquad (n > 1), \qquad a_1, a_2, \ldots = \pm 1.$$

Ces équations auront toutes une racine réelle de module compris entre 0 et 1, car $\Phi(0) = 1$, tandis que

$$\Phi(x) - 1 = \pm x(10 \pm c_2 x \pm \ldots),$$

et

$$|10 \pm c_2 x \pm \ldots| \geqq 10 - \frac{1}{10^2} - \frac{1}{10^3} - \ldots > 9,$$

en sorte que soit $\Phi(+1)$, soit $\Phi(-1)$ est négatif.

Prenons alors $A = 1$, et considérons 2 équations $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ de la forme (38).

Les équations $1 - 10x = 0$ et $1 + 10x = 0$ n'ont pas de racine commune, contrairement à ce qui doit être, si t_2 est suffisamment grand. Si donc Φ et Ψ ont une racine commune de mod < 1, les 2 valeurs de c_1 sont les mêmes.

Les équations $1 + c_1 x + c_2 x^2 = 0$, où les c_i ont une même valeur, n'ont pas de racine commune contrairement à ce qui doit être, si t_2 est suffisamment grand, à moins qu'elles ne coïncident. Donc pour Φ et Ψ les valeurs de c_2 sont les mêmes.

Et ainsi de suite.

Nous vérifions finalement que l'ensemble d'équations (38) est un ensemble d'équations telles qu'à chaque équation correspond au moins une racine réelle de mod < 1, ces équations n'ayant 2 à 2 aucune racine réelle de mod < 1 commune.

L'ensemble de ces équations a d'ailleurs la même puissance que l'ensemble des nombres

$$\frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \frac{\alpha_3}{3^3} + \cdots,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ peuvent prendre les valeurs 1 et 2 de toutes les manières possibles, c. à. d. a la puissance du continu.[1] Il en est de même alors des racines réelles de mod < 1 de ces équations.

On est, de plus, sûr que cet ensemble est formé exclusivement de nombres transcendants,[2] d'après le théorème III.

La même méthode peut servir pour obtenir un ensemble C formé exclusivement de racines transcendantes voisines des racines d'une équation algébrique donnée quelconque (à coëfficients rationnels)

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k = 0.$$

On considèrera

$$P(x) + c_{k+1} x^{k+1} + c_{k+2} x^{k+2} + \ldots = 0,$$

où

$$c_{k+1} = \pm \frac{1}{t_{k+1}}, \qquad c_{k+2} = \frac{\pm 1}{t_{k+2}}, \quad \ldots,$$

t_{k+1} suffisamment grand, $t_{k+2} \leqq \frac{t_{k+1}}{10}, \ldots$

[1] Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 33.

[2] L'ensemble des nombres $\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$ où $a_1, a_2, \ldots$ prennent toutes les valeurs entières $1, 2, \ldots, 9$ contient bien un ensemble de nombres transcendants ayant la puissance du continu, comme l'a montré M. Borel, mais il contient aussi des nombres algébriques.

ESSAIS SUR LE CALCUL DU NOMBRE DES CLASSES DE FORMES QUADRATIQUES BINAIRES AUX COEFFICIENTS ENTIERS

PAR

M. LERCH
À FRIBOURG.

Introduction.

1. Le présent mémoire a été composé d'après les notes manuscrites qui m'ont resté en rédigeant mon mémoire du même titre auquel l'Académie des Sciences de Paris avait accordé le grand prix pour 1900;[1] à défaut d'une copie exacte, il en diffère par le style et peut être même en matière tans qu'il s'agit des détails secondaires. Son objet est d'exposer certaines formules qui se rattachent à la théorie des formes quadratiques aux coefficients entiers telles que

$$ax^2 + bxy + cy^2 \quad \text{ou bien} \quad (a, b, c).$$

J'appellerai équivalentes deux formes (a, b, c) et (a', b', c') lorsqu'elles sont proprement équivalentes dans le sens de GAUSS, c'est à dire, si l'on peut passer de l'une à l'autre en effectuant une substitution linéaire aux coefficients entiers et au déterminant égal à plus un ($x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$; $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$).

Pour des formes équivalentes l'expression $D = b^2 - 4ac$ a la même valeur; on l'appelle le *discriminant.*

[1] Le problème mis en concours a été posé comme suit: *Perfectionner en quelque point important la recherche du nombre des classes de formes quadratiques à coefficients entiers et de deux indéterminées.*

Les discriminants sont alors des nombres entiers, positifs ou négatifs, qui satisfont à l'une ou l'autre de deux congruences

$$D \equiv 1, \qquad D \equiv 0 \pmod 4.$$

Reciproquement, tout entier qui satisfait à une de ces congruences est le discriminant d'une infinité de formes. Nous exclurons cependant le cas où D serait un carré parfait, car dans ce cas la forme quadratique se décompose en produit de deux formes linéaires.

L'ensemble de forme, en nombre infini, équivalentes entre elles, s'appelle une *classe* de formes. Pour un discriminant donné les formes se distribuent en un nombre fini de classes. Ce nombre des classes est une fonction arithmétique du discriminant; son calcul effectif présente des difficultés matérielles qui augmentent avec la grandeur du discriminant; l'objet de nos recherches sera de diminuer ces difficultés pour rendre le calcul réalisable.

Dans la solution de ce problème on peut se borner à certaines restrictions qui n'altèrent pas la généralité du problème.

Le plus grand commun diviseur δ des trois coefficients a, b, c est le même pour toutes les formes d'une classe; les quotients

$$a' = \frac{a}{\delta}, \qquad b' = \frac{b}{\delta}, \qquad c' = \frac{c}{\delta},$$

seront alors les coefficients d'une forme (a', b', c') du discriminant

$$D' = \frac{D}{\delta^2}.$$

Les classes de formes admettant le diviseur δ sont donc ramenées aux classes de formes primitives d'un discriminant moindre $\frac{D}{\delta^2}$.

On appelle *primitives* les formes et les classes correspondantes qui n'ont aucun diviseur plus grand que un.

On peut se borner à la détermination du nombre des classes *primitives* correspondant à un discriminant donné. C'est ce nombre-là que je désignerai désormais par $Cl(D)$, si le discriminant D est positif.

Pour les discriminants négatifs on peut aller plus loin; dans ce cas le signe des coefficients extrêmes a et c reste le même pour toutes les formes

d'une classe. On peut se borner à la détermination du nombre des classes primitives et positives (pour lesquelles les dits coefficients sont positifs), car les classes négatives qui restent sont au nombre égal.

Je désignerai alors par $Cl(-\Delta)$ le nombre des classes primitives et positives du discriminant négatif $-\Delta$.

2. Dans les oeuvres de GAUSS et de DIRICHLET ont été considérées les formes telles que

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

de sorte que le coefficient moyen $2b$ est pair; le nombre $n = b^2 - ac$ s'appelait le *déterminant* de la forme; on était obligé de distinguer entre les formes proprement primitives et les formes improprement primitives; ces dernières ont 2 pour leur plus grand diviseur.

Dans la théorie que nous acceptons qui est plus ancienne et qui a été reprise par KRONECKER les formes proprement primitives du déterminant n ne sont autre chose que les formes primitives du discriminant pair $D = 4n$.

Les formes improprement primitives du déterminant n s'obtiennent en multipliant par deux les formes primitives du discriminant n.

Par ces remarques-là la correspondance des deux théories, classique et moderne, est complètement caractérisée; la différence n'est pas grande, cependant la simplification qui règne dans la théorie moderne et qu'on doit à KRONECKER, mérite l'attention. Il n'y s'agit pas, en réalité, des fait nouveaux, la modification n'a qu'une portée méthodique mais considérable.[1]

Pour la détermination du nombre des classes on a le procédé de réduction dû à LAGRANGE et à GAUSS, puis les formules directes que la science doit à LEJEUNE-DIRICHLET; c'est en nous appuyant sur les découvertes de ce grand géomètre que nous sommes parvenu à des méthodes moins simples en théorie mais plus expéditives dans la pratique.

---

[1] La théorie de KRONECKER se trouve exposée dans l'excellente oeuvre du savant Père J. de Séguier, S. J.:

Formes quadratiques et multiplication complexe. Deux formules fondamentales d'après Kronecker. Berlin, Felix L. Dames, 1894.

La connaissance d'une partie de ce livre est indispensable pour le lecteur de ce mémoire.

Sauf ces méthodes on possède des théorèmes d'une rare beauté qui résultent directement des recherches de LEGENDRE et de GAUSS sur la représentation des nombres par la somme de trois carrés et qui ont été mis sous la forme analytique par KRONECKER.[1] Cet illustre savant les a obtenus comme conséquences des équations de la théorie de la multiplication complexe des fonctions elliptiques, tandis qu'une déduction directe et relativement élémentaire des résultats en question est due à HERMITE.[2] Il me semble que cette dernière voie, intimement liée avec une autre création féconde de ce grand géomètre, celle de l'élément simple des fonctions elliptiques de troisième espèce, puisse mener à des connaissances nouvelles, vu la circonstance que la dite transcendante fournit l'évaluation des sommes de GAUSS.

Les théorèmes de KRONECKER ont donné naissance aux nombreuses et importantes recherches de plusieurs géomètres, et toutes ces découvertes rendraient d'excellents services s'il s'agissait de dresser une table de la fonction $Cl(-\Delta)$, mais elles abrègent peu les calculs lorsqu'ils s'agit d'obtenir le nombre des classes pour un déterminant isolé, la réduction allant par grands nombres voisins au déterminant donné de sorte qu'il faudrait reprendre un grand nombre de fois la réduction pour descendre aux petits arguments pour lesquels la fonction est connue. La recherche directe des formes réduites serait en tout cas plus expéditive, et c'est donc, sauf dans leur fécondité, dans le rôle qu'ils vont jouer dans l'arithmétique de l'avenir que repose l'importance des découvertes de KRONECKER et de ses successeurs.

3. Pour faire ressortir clairement la signification des différents symboles dont nous aurons besoins, je vais rappeler succinctement quelques notions et théorèmes connus, en renvoyant pour leur démonstration au livre de M. DE SÉGUIER.

---

[1] *Über quadratische Formen von negativer Determinante.* Monatsberichte der kön. preuss. Akad. der Wissenschaften, 1875.

[2] *Sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'arithmétique* (Journal de Liouville, 1862), puis: *Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques* (Mélanges math. et astron. tirés du Bulletin de l'Acad. de St. Pétersbourg; réimpr. Acta, 5).

La signification du symbole de la théorie des résidus quadratiques appelé le signe de LEGENDRE

$$\left(\frac{p}{q}\right)$$

a subit sous les mains de JACOBI et de KRONECKER des modifications dont voici la forme définitive.

m, n étant deux entiers on pose

1°. $\left(\frac{m}{n}\right) = 0$ s'ils ont un diviseurs commun plus grand que l'unité;

2°. Si n est impair et

$$n = pp'p'' \dots$$

sa décomposition en facteurs premiers, on prend

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\left(\frac{m}{p''}\right)\dots;$$

3°. Si n est pair et alors $n = 2^a n'$, n' étant impair, on prend

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{2^a n'}\right) = \left(\frac{2}{m}\right)^a \left(\frac{m}{n'}\right);$$

4°. On convient de prendre

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{-n}\right).$$

Dans cette généralité le symbole perd certaines propriétés dont il a joué dans le sens primitif de LEGENDRE et de JACOBI; mais il les retient, si le »numérateur» m est un discriminant.

Je rappelle en particulier que l'on a

1°. Pour un discriminant positif D

$$\left(\frac{D}{m}\right) = \left(\frac{D}{m'}\right), \quad \text{si} \quad m \equiv \pm m' \pmod{D};$$

par exemple

$$\left(\frac{D}{m}\right) = \left(\frac{D}{D-m}\right);$$

2° Pour un discriminant négatif $D = -\Delta$

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right) = \left(\frac{-\Delta}{m'}\right) \text{sgn.}(mm'), \quad \text{si} \quad m \equiv m' \pmod{\Delta};$$

si, par exemple, $0 < m < \Delta$, on aura

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{m-\Delta}\right)$$

ou bien

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{\Delta - m}\right).$$

L'équation

$$\left(\frac{D}{m}\right) = \left(\frac{m}{D}\right), \qquad D \gtrless 0, \qquad m > 0,$$

n'a lieu que pour des discriminants impairs D, m étant quelconque.

Si ensuite D_1 et D_2 sont deux discriminants de signes quelconques mais premiers entre eux, on a

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)\left(\frac{D_2}{D_1}\right) = (-1)^{\frac{1-\text{sgn.}\, D_1}{2} \frac{1-\text{sgn.}\, D_2}{2}},$$

de sorte que ce produit est égal à $+1$, si un au moins des deux discriminants est positif.

Pour tous les discriminants on a la relation

$$\sum_{n=1}^{|D|-1} \left(\frac{D}{n}\right) = 0, \qquad (D \gtrless 0).$$

Cela est évident, si D est négatif; si D est positif, cette relation revient à la suivante

$$\sum_{n=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{n}\right) = 0, \qquad (D > 0).$$

Ensuite, pour D positif,

$$\sum_{n=1}^{D-1} \left(\frac{D}{n}\right) n = 0, \qquad (D > 0);$$

En séparant les deux cas $D_0 > 0$ et $D_0 = -\Delta_0 < 0$, on a en particulier

$$\sum_{h=1}^{D_0-1} \left(\frac{D_0}{h}\right) \cos\frac{2hm\pi}{D_0} = \left(\frac{D_0}{m}\right)\sqrt{D_0},$$

$$\sum_{h=1}^{D_0-1} \left(\frac{D_0}{h}\right) \sin\frac{2hm\pi}{D_0} = 0,$$

$$\sum_{h=1}^{\Delta_0-1} \left(\frac{-\Delta_0}{h}\right) \cos\frac{2hm\pi}{\Delta_0} = 0,$$

$$\sum_{h=1}^{\Delta_0-1} \left(\frac{-\Delta_0}{h}\right) \sin\frac{2hm\pi}{\Delta_0} = \left(\frac{-\Delta_0}{m}\right)\sqrt{\Delta_0}.$$

4. Ces préliminaires rappelés, nous passons à énoncer les résultats classique trouvés par LEJEUNE-DIRICHLET pour évaluer le nombre des classes. En reprenant l'écriture de KRONECKER, nous ferons correspondre à chaque discriminant négatif D le nombre τ qui est égal à 6 pour $D = -3$, puis $\tau = 4$ pour $D = -4$ et $\tau = 2$ pour $D < -4$.

Dans le cas de discriminant positif on est obligé d'introduire la *solution fondamentale* de l'équation de FERMAT

$$T^2 - DU^2 = 4;$$

c'est le couple des plus petits nombres positifs T, U qui satisfont à cette équation. On pose, pour abréger,[1]

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{2} = E(D),$$

et les résultats de DIRICHLET s'écriront comme il suit

(1) $$Cl(-\Delta) = \tau \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{\sqrt{\Delta}}{2n\pi},$$

(2) $$Cl(D) \log E(D) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\sqrt{D}}{n}.$$

---

[1] Cette écriture n'est pas d'ailleurs très bien choisie, le symbole, $E(x)$ ayant déjà une signification généralement acceptée.

DIRICHLET lui-même effectua la sommation de ces séries dans le cas des discriminants fondamentaux sous forme finie et, après les modifications nécessaires, ses résultats se résument par les deux équations

$$Cl(-\Delta) = -\frac{\tau}{2\Delta}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)h, \tag{3}$$

$$Cl(D)\log E(D) = -\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\log\sin\frac{h\pi}{D} \tag{4}$$

(D et $-\Delta$ étant des discriminants fondamentaux).

Théoriquement ces résultats élégants ne laissent rien à désirer, mais il en sera autrement si l'on veut s'en servir dans la pratique où leur emploi devient extrèmement laborieux.

DIRICHLET a trouvé lui-même, pour des discriminants négatifs, des formules plus simples, dont la recherche lui a été indispensable puisque il a voulu mettre, dans les signes de LEGENDRE, le discriminant au dénominateur.

Ses résultats, présentés sous la façon de la théorie de KRONECKER, s'expriment par les formules suivantes:

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right) = 2\,\frac{2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,Cl(-\Delta),\\
&\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right) = \frac{1}{2}\,Cl(-4D),\\
&\sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right) - \sum_{\left[\frac{3}{8}D\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right) = \frac{1}{2}\,Cl(-8D),\\
&\sum_{\left[\frac{1}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right) = \frac{1}{2}\,Cl(-8\Delta).
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Nous retrouverons ces formules du grand géomètre comme conséquences immédiates de deux relations (équivalentes d'ailleurs) plus générales que voici:

$$(6)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{aD}{\Delta}\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)=\frac{1}{2}Cl(-\Delta D), \\ \displaystyle\sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{a}\right)\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{a\Delta}{D}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=-\frac{1}{2}Cl(-\Delta D), \end{cases}$$

où l'on suppose que D et $-\Delta$ soient deux discriminants fondamentaux, le premier positif, le second négatif.

Les exemples des discriminants $-559=-43.13$ et $1159=-59.21$ que j'ai traités dans le texte, font voir que l'emploi des formules (6) présente l'avantage sur la recherche directe des formes réduites, tandis que l'emploi de la première des formules (5) devient matériellement impossible.

Mais ce procédé ne fournit une méthode applicable que pour des discriminants composés, contenus, bien entendu, dans certaines limites.

Si Δ est premier, la difficulté subsiste, et il faudra chercher une autre voie. Dans certaines limites la formule suivante qui est également exacte pour tous les discriminants fondamentaux pourra être utile:

$$(7)\qquad \sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{3}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)=\frac{1+\left(\frac{-3}{\Delta}\right)-\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{2}Cl(-\Delta).$$

Dans d'autres cas on pourrait recommander l'emploi des approximations analytiques qui se présentent véritablement en foule et dont voici les exemples les plus simples:

$$(8)\qquad \frac{2}{\tau}Cl(-\Delta)=\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{n}e^{-\frac{n^2u\pi}{\Delta}}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\int_{n\sqrt{\frac{\pi}{\Delta u}}}^{\infty}e^{-x^2}dx,$$

où u signifie une quantité positive arbitraire pour laquelle on prend le mieux l'unité;

$$(9)\qquad \frac{1}{\tau}Cl(-\Delta)=\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{e^{\frac{mu\pi}{\Delta}}+1}+\frac{\sqrt{\Delta}}{u}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{\sin\text{hyp}\,\frac{2m\pi}{u}}$$

où on prend le mieux $u = \sqrt{2\Delta}$,

$$(10)\qquad \frac{\pi}{2\tau} Cl(-\Delta) = \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arc\,tg} e^{-\frac{mu\pi}{\Delta}} + \frac{1}{4}\sqrt{\Delta} \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{1}{\cos \operatorname{hyp} \frac{m\pi}{u}},$$

$$(11)\qquad \left(\frac{1}{u} - 1\right) Cl(-\Delta) = \tau \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{e^{\frac{2mu\pi}{\sqrt{\Delta}}} - 1} - \frac{\tau}{u} \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{u\sqrt{\Delta}}} - 1};$$

en différentiant et prenant $u = 1$, on en déduit

$$(12)\qquad Cl(-\Delta) = -\tau \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{\sqrt{\Delta}}} - 1} + \frac{4\tau\pi}{\sqrt{\Delta}} \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{m}{\left(e^{\frac{m\pi}{\sqrt{\Delta}}} - e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{\Delta}}}\right)^2}.$$

L'emploi de ces développements devient autant plus commode, si l'on connait un facteur du nombre cherché $Cl(-\Delta)$. La distribution des classes en genres fait voir que (pour des discriminants fondamentaux) ce nombre sera divisible par $2^{\varpi-1}$, si Δ contient ϖ facteurs premiers différents. Au même but peuvent servir les congruences suivantes qui correspondent aux discriminants formés de deux ou trois facteurs premiers et dont la première est due à M. Hurwitz:

$$(13)\qquad Cl(-pq) \equiv 1 - \left(\frac{p}{q}\right) \pmod 4,$$

(p et q étant des nombres premiers).

(14) »Si les trois nombres premiers p, q, r sont congrus à moins un pour le module quatre, on aura

$$Cl(-pqr) \equiv 4 \pmod 8,$$

si

$$\left(\frac{pq}{r}\right) = \left(\frac{pr}{q}\right) = \left(\frac{qr}{p}\right),$$

mais

$$Cl(-pqr) \equiv 0 \pmod 8,$$

si cette dernière condition n'est pas remplie.»

(15) »Supposons $p \equiv q \equiv -r \equiv 1 \pmod 4$, alors on a ou

$$\left(\frac{p}{r}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) \quad \text{et} \quad Cl(-pqr) \equiv \left(1 - \left(\frac{p}{r}\right)\right)^2 \pmod 8$$

ou bien

$$\left(\frac{p}{r}\right) = -\left(\frac{q}{r}\right) \quad \text{et} \quad Cl(-pqr) \equiv 2\left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)\right) \pmod 8.$$

Pour les discriminants positifs l'emploi de la formule de DIRICHLET est encore plus pénible; KRONECKER a réussi de combler cette difficulté en la ramenant à la recherche des formes réduites d'un discriminant négatif. Pour rappeler le célèbre résultat de l'illustre géomètre je pose [1]

$$H(\omega) = e^{\frac{\omega\pi i}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\omega\pi i}),$$

ω étant un quantité à partie imaginaire positive.

Etant donné un discriminant fondamental et positif D, choisissons un discriminant fondamental négatif $-\Delta_1$, premier avec le précédent, de sorte que le produit $-\Delta = -\Delta_1 D$ sera aussi un discriminant fondamental.

Cela étant, déterminons un système complet de représentants [2] des différentes classes positives du discriminant $-\Delta$ que je désignerai par (a, b, c) de sorte que $4ac - b^2 = \Delta$. Pour une forme (a, b, c) les signes de LEGENDRE

$$\left(\frac{-\Delta}{ax^2 + bxy + cy^2}\right)$$

ont une valeur indépendante de x et y pourvu que l'entier $ax^2 + bxy + cy^2$ soit premier avec Δ. En convenant de désigner ce signe invariant par

$$\left(\frac{-\Delta}{a, b, c}\right),$$

---

[1] D'après M. DEDEKIND on se sert du symbole $\eta(\omega)$; mais la lettre η ayant été employée par WEIERSTRASS dans une signification toute différente, je préfère une écriture nouvelle.

[2] Représentant d'une classe s'appelle une forme quelconque y appartenant.

qui, pour des discriminants composés, pourrait simplifier le calcul dans des cas nombreux, si l'on disposait d'une table soigneusement construite des polynômes Y et Z.

En passant sous silence certains détails que nous avons trouvés ou retrouvés sur les fonctions $Y(x)$ et $Z(x)$ et qui se trouvent exposés au chapitre III, le lecteur trouvera dans ce qui suit les formules directes pour le calcul du nombre des classes d'un discriminant positif formamental, à savoir

$$(18)\qquad Cl(D)\log E(D)=\frac{2\sqrt{D}}{\sqrt{\pi}}\sum_1^\infty\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\int_{n\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty}e^{-x^2}dx+\sum_1^\infty\left(\frac{D}{n}\right)\int_{\frac{n^2\pi}{Du}}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x},$$

u signifiant une quantité positive arbitraire, pour laquelle on prend le mieux l'unité; puis

$$(19)\qquad \frac{1}{2}Cl(D)\log E(D)=\sqrt{D}\sum_1^\infty\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\frac{1}{e^{\frac{2n\pi}{u}}+1}+\sum_1^\infty\left(\frac{D}{n}\right)\log\frac{1+e^{-\frac{nu\pi}{D}}}{1-e^{-\frac{nu\pi}{D}}},$$

où on peut prendre $u=\sqrt{2D}$; et enfin

$$(20)\qquad \frac{1}{2}Cl(D)\log E(D)=\frac{\pi}{2}u\sum_1^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h^2}{D^2}-\sum_1^\infty\left(\frac{D}{m}\right)\log\left(1-e^{-\frac{2mu\pi}{D}}\right)$$
$$-\sqrt{D}\sum_1^\infty\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{u}}-1},$$

où il se recommande de prendre $u=\sqrt{D}$. A cause de présence de la somme

$$\sum_1^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h^2}{D^2},$$

laquelle est d'ailleurs égale à l'expression plus simple

$$-\frac{4}{4-\left(\frac{2}{D}\right)}\sum_1^{\left[\frac{D}{2}\right]}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D},$$

cette dernière formule ne peut être employée que pour les valeurs de D assez modérées. Mais les deux autres formules sont assez commodes, puisque le facteur $\log E(D)$ est souvent de même grandeur que $\sqrt{D}$.

Plusieurs de nos résultats ne présentent qu'un intérêt théorique. Telles sont par exemples les équations obtenues au I^r chapitre dont je veux rappeler un

$$Cl(D_1 D_2 \ldots D_r)$$

$$= (-1)^\nu \sum_{h_1=1}^{\Delta_1-1} \left(\frac{D_1}{h_1}\right) \sum_{h_2=1}^{\Delta_2-1} \left(\frac{D_2}{h_2}\right) \cdots \sum_{h_r=1}^{\Delta_r-1} \left(\frac{D_r}{h_r}\right) E\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right)$$

où $D_1, D_2, \ldots, D_r$ sont des discriminants fondamentaux dont $2\nu + 1$ négatifs, puis généralement $\Delta_a = |D_a|$.

Notre mémoire se termine par certains développements semiconvergents. Nous n'y avons pas développé nos recherches analytiques qui intéressent la théorie des modules singuliers et ne s'appliquent pas au problème particulier qui nous occupe. Je me réserve d'y revenir dans une autre occasion et me contente de signaler les résultats suivants, d'un genre différent:

Représentons par $\mathfrak{R}(x)$ le plus petit reste positif de la quantité réelle x et posons pour abréger

$$\sum_{\rho=1}^{m-1} \rho \mathfrak{R}\left(\frac{n\rho}{m}\right) = \mathfrak{R}(m, n).$$

Cela étant, prenons un entier positif arbitraire τ et posons

$$\left(\frac{T + U\sqrt{D}}{2}\right)^\tau = \frac{t + u\sqrt{D}}{2},$$

en supposant que D soit un discriminant fondamental positif, et T, U la solution fondamentale de l'équation de FERMAT.

Concevons maintenant un système complet de représentants (a, b, c) des différentes classes du discriminant D, choisis de la sorte que a soit positif; alors on aura

$$\sum_{(a,b,c)} \left[\frac{1}{a} \mathfrak{R}\left(au, \frac{bu - t}{2}\right) + \frac{t}{12a} - \frac{au^2}{4}\right] = 0.$$

Si en second lieu D est le produit de deux discriminants négatifs fondamentaux $-\Delta_1$ et $-\Delta_2$, auxquels correspondent les nombres τ_1 et τ_2 autrefois représentés par τ, on a

$$\sum_{(a,b,c)} \left(\frac{-\Delta_1}{a\,,\, b\,,\, c}\right)\left[\frac{1}{a}\Re\left(au\,,\, \frac{bu-t}{2}\right) + \frac{t}{12a} - \frac{au^2}{4}\right] = \frac{2\tau u}{\tau_1\tau_2} Cl(-\Delta_1)\,Cl(-\Delta_2).$$

CHAPITRE I.

1. Le point de départ de notre exposition est l'équation fondamentale de Dirichlet. Soit D un discriminant quelconque, D_0 le discriminant fondamental qui lui corresponde de la sorte que $D = D_0 Q^2$, l'entier Q devant se réduire à l'unité, si le discriminant donné est fondamental.

Notons par $(a\,,\, b\,,\, c)$ les représentants des différentes classes de formes primitives du discriminant D, en convenant de ne considérer que des classes positives dans le cas de discriminant négatif, et supposons que l'on a choisi les formes où $a > 0$.

Posons ensuite $\tau = 1$ pour $D > 0$, $\tau = 6$ pour $D = -3$, $\tau = 4$ pour $D = -4$ et $\tau = 2$ pour $D < -4$.

Cela étant, l'équation de Dirichlet s'écrira comme il suit

$$(1) \qquad \sum_{(a,b,c)} \sum_{m,n}{}^{*} \left(\frac{Q^2}{am^2 + bmn + cn^2}\right) F(am^2 + bmn + cn^2)$$

$$= \tau \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk).$$

Pour $F(z)$ on peut prendre une fonction quelconque qui assure la convergence absolue des deux séries à double entrée; quant au second membre, les conditions sommatoires sont évidentes, et au premier, il faut

aient une valeur commune S, différente de zéro, on aurait dans la formule

$$\frac{\tau}{S}\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{k}\right)\left(\frac{D}{h}\right)F(hk)$$

une expression sous forme finie et purement arithmétique du nombre des classes du discriminant D.

Or on ne connait aucune fonction de l'espèce anoncée et pour parvenir à la détermination du nombre des classes on est obligé de faire usage des raisonnements analytiques, étrangers à la théorie élémentaire des nombres.

Nous choisirons une quantité positive X et prendrons

$$F(z) = 1 \quad \text{pour} \quad z \leqq X,$$
$$F(z) = 0 \quad \text{pour} \quad z > X;$$

nous diviserons alors par X les deux membres de la formule (1) et passerons à la limite pour X infini.

Pour une forme (a, b, c) fixe, la somme

$$N(X) = \sum{}^{*}\left(\frac{Q^2}{am^2 + bmn + cn^2}\right)F(am^2 + bmn + cn^2)$$

revient à un entier, nombre des combinaisons m, n qui remplissent certaines conditions. La recherche étant plus facile lorsque $Q = 1$, je commence par traiter le cas d'un discriminant fondamental. Dans ce cas la quantité $N(X)$ n'est autre chose que le nombre des points aux coordonnées entières et différents de l'origine qui satisfont à la condition

$$ax^2 + bxy + cy^2 \leqq X,$$

à laquelle, dans le cas de discriminant positif, s'ajoutent encore les deux suivantes

$$x > gy, \qquad y \geqq 0.$$

Cette représentation géométrique de la question nous permettra d'obten facilement la limite du quotien $N(X):X$ pour X infini.

Pour y parvenir la distinction des deux cas est nécessaire et je co mence par l'hypothèse

1° $$D = -\Delta < 0.$$

La quantité $N(X)$ sera alors le nombre des points aux coordonnées entières placés dans l'aire de l'ellipse

$$ax^2 + bxy + cy^2 = X.$$

Le quotient $N(X):X$ sera égal à la surface somme de $N(X)$ carrés ayant pour côtés la longueur commune $\frac{1}{\sqrt{X}}$. Construisons les points aux coordonnées

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{X}}, \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt{X}},$$

ils se trouvent évidemment dans l'aire de l'ellipse

$$(\alpha) \qquad a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 = 1$$

et les $N(X)$ carrés en question peuvent être disposés de la sorte que les points (ξ, η) deviennent leur centres. Ils rempliront simplement toute l'aire de l'ellipse dont l'équation est (α), si l'on ne compte pas une région, très mince pour grandes valeurs de X, qui entoure le contour (α), et si l'on néglige le carré ayant pour centre l'origine.

La limite pour X infini du rapport $N(X):X$ sera donc exactement l'aire de l'ellipse donnée par l'équation (α) et sera exprimée par l'intégrale double

$$\iint d\xi d\eta, \qquad a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 \leqq 1,$$

que je représente par J.

La condition de limites pouvant s'écrire

$$(2a\xi + b\eta)^2 + \Delta\eta^2 \leqq 4a$$

je pose dans l'intégrale

$$2a\xi + b\eta = \zeta\sqrt{\Delta}, \quad \text{d'où} \quad d\xi = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}d\zeta,$$

ce qui donne

$$J = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\iint d\eta d\zeta, \qquad \zeta^2 + \eta^2 \leqq \frac{4a}{\Delta}.$$

L'intégrale étant ainsi ramenée à celle qui exprime l'aire du cercle ayant la quantité $\sqrt{\frac{4a}{\Delta}}$ pour rayon, on conclut

$$J = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{4a\pi}{\Delta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}$$

ou bien

$$\lim \frac{N(X)}{X} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}},$$

en supposant $D = -\Delta$, $Q = 1$.

Soit en second lieu

2° $$D > 0, \qquad Q = 1.$$

Les coordonnées entières x et y des points que nous devons considérer satisferont alors aux conditions

$$ax^2 + bxy + cy^2 \leqq X, \qquad x > gy, \qquad y \geqq 0,$$

et si nous posons

$$\frac{x}{\sqrt{X}} = \xi, \qquad \frac{y}{\sqrt{X}} = \eta,$$

les points (ξ, η) se trouveront dans l'aire limitée par l'hyperbole

$$a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 = 1$$

et par les deux droites $\eta = 0$, $\xi = g\eta$.

En construisants les carrés du côté égal à $\frac{1}{\sqrt{X}}$ ayant leurs centres aux différents points ξ, η dont nous venons de parler, leur surface totale sera précisément égale à la quantité $N(X):X$. Or les dits carrés remplissent simplement l'aire de la figure dont nous venons de parler, si l'on ne compte pas une bande très mince pour X très grand. Il s'ensuit que la limite pour X infini du quotient $N(X):X$ sera donnée par l'intégrale double

$$J' = \iint d\xi d\eta, \qquad a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 \leqq 1, \qquad \xi > g\eta, \qquad \eta > 0.$$

La première des conditions de limites s'écrivant

$$(2a\xi + b\eta)^2 - D\eta^2 \leqq 4a,$$

donne le résultat

$$J' = \frac{1}{\sqrt{D}} \log \frac{T + U\sqrt{D}}{2},$$

d'où la formule cherchée

$$\lim_{X=\infty} \frac{N(X)}{X} = \frac{1}{\sqrt{D}} \log \frac{T + U\sqrt{D}}{2},$$

lorsque $D > 0$, $Q = 1$.

Pour traiter le cas général où D n'est plus fondamental nous aurons besoins de la fonction numérique $\mu(n)$ introduite par Moebius;[1] elle est égale à zéro, si n admet un diviseur carré plus grand que un, mais $\mu(n) = (-1)^{\varpi}$, si n se compose de ϖ facteurs premiers différents; enfin $\mu(1) = 1$. Cette fonction jouit de la propriété qui s'exprime par l'équation

$$\sum_{n:d} \mu(d) = 0,$$

où d parcourt tous les diviseurs du nombre $n > 1$.

Si $n = 1$, la somme se réduit au terme unique dont la valeur est $\mu(1) = 1$.

C'est au moyen de cette propriété qu'on vérifie l'identité suivante qui est très importante

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{k}\right) f(k) = \sum_{Q:d} \mu(d) \sum_{h=0}^{\infty} f(hd), \tag{2}$$

et dans laquelle d parcourt tous les diviseurs de Q et $f(z)$ signifie une fonction quelconque qui assure la convergence des séries que la formule contient.

Enfin, pour obtenir l'expression de Legendre

$$\left(\frac{Q^2}{am^2 + bmn + cn^2}\right)$$

sous une forme plus simple, je suppose les représentants (a, b, c) choisis

[1] Cette notation est maintenant presque généralement adoptée; Kronecker s'est servi du symbole ε_n au lieu de $\mu(n)$.

de sorte que

$$\lim_{X=\infty} \frac{N(X)}{X} = \frac{\varphi(Q)}{Q} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}},$$

— Δ étant un discriminant négatif général ($\Delta = \Delta_0 Q^2$).

Lorsque le discriminant D est positif, notre quantité $N(X)$ est égale à la série à double entrée

$$N(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m>gn} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2);$$

en lui appliquant la méthode de transformation tirée de la relation (2), nous aurons d'abord

$$N(X) = \sum_{Q:d} \mu(d) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{dm>gn} F(ad^2m^2 + bdmn + cn^2).$$

La condition sommatoire $dm > gn$ peut être écrite comme il suit

$$m > \frac{dT - bdU}{2ad^2U} n,$$

et prendra une forme plus simple, si l'on introduit les notations

$$dT = T_1, \qquad U = U_1, \qquad ad^2 = a_1, \qquad bd = b_1, \qquad c = c_1,$$

et enfin

$$D_1 = b_1^2 - 4a_1c_1 = Dd^2.$$

On aura

$$T_1^2 - D_1 U_1^2 = 4d^2,$$

et la condition sommatoire s'écrira

$$m > g_1 n, \quad \text{où} \quad g_1 = \frac{T_1 - b_1 U_1}{2a_1 U_1}.$$

En cherchant la limite pour X infini de la quantité

$$\frac{1}{X} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m>g_1 n} F(a_1 m^2 + b_1 mn + c_1 n^2)$$

le raisonnement sera tout semblable à celui que nous avons exposé plus haut et on parvient à obtenir la valeur de la limite en question sous la forme de l'intégrale double

$$J'' = \frac{1}{2a_1}\iint \partial\eta\,\partial\zeta, \qquad \zeta^2 - D_1\eta^2 \leqq 4a_1, \qquad \eta > 0, \qquad \zeta > \frac{T_1}{U_1}\eta.$$ [1]

Elle est évidemment égale à la quantité

$$\frac{1}{2a_1}\int_0^{U\sqrt{a}} \partial\eta\left(\sqrt{4a_1 + D_1\eta^2} - \frac{T_1}{U_1}\eta\right)$$

qui coïncide avec l'expression

$$\frac{1}{d}J' = \frac{1}{d\sqrt{D}}\log\frac{T + U\sqrt{D}}{2}.$$

On aura donc la valeur cherchée

$$\lim_{X=\infty}\frac{N(X)}{X} = \sum\frac{\mu(d)}{d}\frac{1}{\sqrt{D}}\log\frac{T+U\sqrt{D}}{2}$$

ou bien

$$\lim\frac{N(X)}{X} = \frac{\varphi(Q)}{Q}\frac{1}{\sqrt{D}}\log\frac{T+U\sqrt{D}}{2},$$

ce qui résout le problème dans le cas de discriminant positif général.

Les formules obtenues plus haut pour les discriminants fondamentaux résultent des formules générales en y prenant $Q = 1$.

Pour résumer, j'emploie pour un moment l'écriture

$$M = \frac{\varphi(Q)}{Q}\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}, \quad \text{lorsque} \quad D = -\Delta = -\Delta_0 Q^2,$$

et

$$M = \frac{\varphi(Q)}{Q}\frac{1}{\sqrt{D}}\log\frac{T+U\sqrt{D}}{2}, \quad \text{lorsque} \quad D = D_0 Q^2 > 0.$$

Nos résultats obtenus jusqu'ici se résument par la formule

$$\lim_{X=\infty}\left\{\frac{1}{X}\sum_{m,n}{}^{*}\left(\frac{Q^2}{m}\right)F(am^2+bmn+cn^2)\right\} = M.$$

---

[1] Pour éviter tout malentendu j'emploie le caractère ∂ au lieu du symbole habituel, pour désigner la différentielle.

En faisant usage de ce resultat dans l'équation qui résulte de la formule de DIRICHLET (1*)

$$\sum_{(a,b,c)} \lim_{X=\infty} \left\{ \frac{1}{X} \sum_{m,n}{}^{*} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2) \right\}$$
$$= \tau \lim_{X=\infty} \left\{ \frac{1}{X} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk) \right\},$$

on observe que le premier membre se compose d'autant de fois la quantité M qu'il y a des formes (a, b, c), c'est à dire qu'il y a de classes différentes. On a donc

$$MCl(D) = \tau \lim_{X=\infty} \left\{ \frac{1}{X} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk) \right\}.$$

L'évaluation de la limite qui constitue le second membre donnera évidemment une expression du nombre des classes $Cl(D)$ du discriminant D. La limite en question se simplifie d'abord en lui appliquant la formule (2) qui donne

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk) = \sum_{Q:d} \mu(d) \sum_{k=1}^{\infty} F(dhk),$$

et puisque pour notre fonction $F(z)$ spéciale

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(dkh) = E\left(\frac{X}{dh}\right),$$

en faisant usage de l'écriture habituelle $E(z)$ pour désigner le plus grand entier contenu dans z, nous aurons

$$\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk) = \sum_{Q:d} \mu(d) \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) E\left(\frac{X}{dh}\right)$$

et notre résultat prend la forme

$$MCl(D) = \tau \lim_{X=\infty} \left\{ \sum_{Q:d} \mu(d) \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{E\left(\frac{X}{dh}\right)}{X} \right\}.$$

Nous verrons bientôt que les limites

$$\lim_{w=\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{E\left(\frac{w}{h}\right)}{w}$$

existent et ont pour valeur la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h};$$

il s'ensuit que l'on a

$$\lim_{X=\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{E\left(\frac{X}{dh}\right)}{X} = \frac{1}{d} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h},$$

et notre résultat devient

$$MCl(D) = \tau \sum_{Q:d} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h}.$$

En faisant usage de la formule

$$\sum \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(Q)}{Q}$$

une réduction se présente tout de suite, et on aura la formule

$$M_0 Cl(D) = \tau \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h},$$

où

$$M_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}, \quad \text{si} \quad D = -\Delta < 0,$$

et

$$M_0 = \frac{1}{\sqrt{D}} \log \frac{T + U\sqrt{D}}{2}, \quad \text{si} \quad D > 0.$$

En d'autres termes on aura les relations classiques de LEJEUNE-DIRICHLET

$$(3) \qquad Cl(-\Delta) = \tau \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{\sqrt{\Delta}}{2h\pi},$$

$$(4) \qquad Cl(D) \log \frac{T + U\sqrt{D}}{2} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{\sqrt{D}}{h}.$$

2. Cette démonstration des résultats classiques de DIRICHLET qui vient d'être exposée est en principe due à HERMITE[1] qui l'a succinctement publiée dans les Comptes Rendus, t. 55 (1862).

Je vais la compléter en établissant le lemme sur lequel elle s'appuie et sur lequel le grand géomètre n'à pas insisté; il s'agit de la formule

$$\lim_{m=\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{E\left(\frac{m}{h}\right)}{m} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h}.$$

Je l'envisage comme un cas particulier de la limite plus générale, celle de la somme

$$(a) \qquad \sum_{h=1}^{\infty} w_h \frac{E(mv_h)}{m}.$$

On est amené à cette expression par un autre problème tout étranger à l'Arithmétique, en se demandant si l'on parvient à une valeur approchée de la série infinie convergente

$$\sum_{h=1}^{\infty} w_h v_h, \qquad \left(\lim_{h=\infty} v_h = 0\right),$$

en remplaçant les quantités positives v_h par leurs valeurs approchées prises avec un nombre fini k des décimales. En désignant 10^k par m, la valeur approchée de v_h est en effet la fraction

$$\frac{E(mv_h)}{m},$$

et on est amené à l'expression (a).

[1] *Sur la théorie des formes quadratiques.*

et j'emploie les décompositions suivantes des sommes S et S_m:

$$S = S' + S'', \qquad S_m = S'_m + S''_m,$$

où

$$S' = \sum_{\nu=1}^{n-1} w_\nu v_\nu, \qquad S'' = \sum_{\nu=n}^{\infty} w_\nu v_\nu,$$

$$S'_m = \sum_{\nu=1}^{n-1} w_\nu \frac{E(mv_\nu)}{m}, \qquad S''_m = \sum_{\nu=n}^{\infty} w_\nu \frac{E(mv_\nu)}{m}.$$

L'emploi de l'identité d'Abel permet de mettre les restes S'' et S''_m sous la forme suivante

$$S'' = w_n(v_n - v_{n+1}) + (w_n + w_{n+1})(v_{n+1} - v_{n+2})$$
$$+ (w_n + w_{n+1} + w_{n+2})(v_{n+2} - v_{n+3}) + \dots,$$
$$S''_m = w_n(v'_n - v'_{n+1}) + (w_n + w_{n+1})(v'_{n+1} - v'_{n+2})$$
$$+ (w_n + w_{n+1} + w_{n+2})(v'_{n+2} + v'_{n+3}) + \dots,$$

où j'ai posé pour abréger

$$v'_\nu = \frac{E(mv_\nu)}{m}.$$

Les quantités v'_ν également comme les quantités v_ν ne vont jamais en croissant, de sorte que les différences

$$v_{n+\nu} - v_{n+\nu+1} \quad \text{et} \quad v'_{n+\nu} - v_{n+\nu+1}$$

ne sont jamais négatives. Ensuite, les sommes

$$w_n + w_{n+1} + \dots + w_{n+\nu} = s_{n+\nu} - s_{n-1}$$

restant, grâce à l'hypothèse, plus petites en valeur absolue que la quantité constante $2g$, on aura évidemment les inégalités

$$|S''| < 2g[(v_n - v_{n+1}) + (v_{n+1} - v_{n+2}) + \dots],$$
$$|S''_m| < 2g[(v'_n - v'_{n+1}) + (v'_{n+1} - v'_{n+2}) + \dots]$$

ou bien

$$|S''| < 2gv_n, \qquad |S''_m| < 2g\frac{E(mv_n)}{m} < 2gv_n.$$

En choisissant n suffisamment grand, les sommes complémentaires S'' et S''_m seront alors aussi petites qu'on le voudra, et d'autre part les sommes S' et S'_m diffèrent autant peu qu'on le veut, si l'on prend pour m une quantité suffisamment grande. Il s'ensuit que l'on a sous les hypothèses anoncées

$$\lim_{m=\infty} S_m = S.$$

Dans les séries de DIRICHLET on a spécialement

$$v_\nu = \frac{1}{\nu}, \qquad w_\nu = \left(\frac{D}{\nu}\right);$$

les conditions du théorème seront vérifiées, si l'on observe que grâce aux relations

$$\sum_{\nu=1}^{|D|} \left(\frac{D}{\nu}\right) = 0, \qquad \left(\frac{D}{\nu + k|D|}\right) = \left(\frac{D}{\nu}\right)$$

les sommes

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{D}{\nu}\right) = s_n$$

n'ont que $|D| - 1$ valeurs différentes. L'équation dont il s'agit

$$\lim_{m=\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{E\left(\frac{m}{h}\right)}{m} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h}$$

se trouve alors démontrée.

3. Les formules (3) et (4) qui viennent d'être démontrées ramènent la détermination du nombre des classes à la sommation de la série infinie

$$(5) \qquad P(D) = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h};$$

pour désigner cette série KRONECKER s'est servi de la lettre $H(D)$, mais puisque nous conservons la lettre H pour désigner la fonction

$$H(\omega) = e^{\frac{\omega\pi i}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\omega\pi i})$$

ce qui évite toute confusion entre les formules de WEIERSTRASS et DEDEKIND, il a fallu de changer la notation du grand géomètre. De l'autre côté je crois pouvoir conserver la notation rélative au cas de $D > 0$,

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{2} = E(D) \tag{6}$$

puisque une confusion avec la fonction $E(z)$ de LEGENDRE ne parait pas probable.

KRONECKER est allé un peu plus loin, en acceptant une signification du symbole $E(D)$ aussi dans le cas $D < 0$, ce qui lui a permit de condenser les deux résultats (3) et (4) en une seule équation.

Mais cette simplification est seulement apparente, les deux cas $D > 0$ et $D < 0$ sont de nature tellement différente que toute fusion ne puisse être qu'artificielle et ne pourra se tenir qu'en peu de formules.

Nous devons maintenant nous occuper de la série $P(D)$ et des deux formules de DIRICHLET que je prends sous la forme

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} Cl(-\Delta) = \tau P(-\Delta), \tag{3*}$$

$$\frac{1}{\sqrt{D}} Cl(D) \log E(D) = P(D). \tag{4*}$$

Une première remarque consiste en ce que la série $P(D)$ (en considérant ensemble les deux cas $D > 0$ et $D < 0$) peut se sommer au moyen de la dérivée logarithmique de la fonction gamma.

Posons, pour abréger, $|D| = \Delta$ et considérons la somme finie

$$P_m = \sum_{h=1}^{m\Delta} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h};$$

on aura évidemment $\lim P_m = P(D)$ (pour m infini). En posant $h = \alpha + \Delta\nu$, cette somme devient

$$P_m = \sum_{\alpha=1}^{\Delta} \left(\frac{D}{\alpha}\right) \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{\alpha + \Delta\nu};$$

cela étant, les identités

$$\sum_{\alpha=1}^{\Delta} \left(\frac{D}{\alpha}\right) = 0, \qquad \left(\frac{D}{\Delta}\right) = 0$$

permettent d'écrire

$$P_m = \frac{1}{\Delta}\sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{a}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{\frac{a}{\Delta}+\nu} - \log m\right),$$

et en faisant usage de la formule élémentaire

$$\lim_{m=\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{x+\nu} - \log m\right) = -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

le passage à la limite pour m infini nous donne le résultat voulu

$$(7) \qquad P(D) = -\frac{1}{\Delta}\sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{a}\right)\frac{\Gamma'\left(\frac{a}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{\Delta}\right)}; \qquad (\Delta = |D|).$$

On en tire, en séparant les deux cas, les équations

$$(7^a) \qquad \frac{2\pi}{\tau}\sqrt{\Delta}\, Cl(-\Delta) = -\sum_{a=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)\frac{\Gamma'\left(\frac{a}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{\Delta}\right)},$$

$$(7^b) \qquad \sqrt{D}\, Cl(D)\log E(D) = -\sum_{a=1}^{D-1}\left(\frac{D}{a}\right)\frac{\Gamma'\left(\frac{a}{D}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{D}\right)}.$$

La relation

$$\left(\frac{-\Delta}{\Delta-a}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{a}\right)$$

permet de suite de simplifier (7^a); mettons-y en effet $\Delta - a$ au lieu de a et ajoutons membre à membre avec (7^a); on aura

$$\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{\tau}\, Cl(-\Delta) = \sum_{a=1}^{\Delta-1}\left[\frac{\Gamma'\left(1-\frac{a}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{a}{\Delta}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{a}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{\Delta}\right)}\right],$$

et la relation bien connue

$$\frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \pi \cot x\pi$$

donne immédiatement

(8) $$\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau} Cl(-\Delta) = \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \cot \frac{h\pi}{\Delta}$$

ou en réunissant les termes égaux

(8°) $$\frac{2\sqrt{\Delta}}{\tau} Cl(-\Delta) = \sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \cot \frac{h\pi}{\Delta}.$$

On parvient au même résultat en se servant, pour obtenir la somme (7^a), de la formule connue de Gauss

(α) $$\frac{\Gamma'\left(\frac{h}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{h}{\Delta}\right)} = \Gamma'(1) - \log 2\Delta - \frac{\pi}{2} \cot \frac{h\pi}{\Delta} + \sum_{a=1}^{\Delta-1} \cos \frac{2ah\pi}{\Delta} \log \sin \frac{a\pi}{\Delta};$$

mais cette dernière permet aussi de traiter le cas de discriminant positif; la formule (7^b) donnera alors

(9) $$\sqrt{D}\, Cl(D) \log E(D) = -\sum_{a=1}^{D-1} \log \sin \frac{a\pi}{D} \sum_{h=1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \cos \frac{2ah\pi}{D}.$$

Cette équation beaucoup plus compliquée que la formule (8) se simplifiera, si l'on se borne aux *discriminants fondamentaux.* Pour un tel discriminant a lieu l'équation

$$\sum_{h=1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \cos \frac{2ah\pi}{D} = \left(\frac{D}{a}\right)\sqrt{D}, \qquad (\sqrt{D} > 0),$$

et la formule (9) deviendra

(9^*) $$Cl(D) \log E(D) = -\sum_{a=1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) \log \sin \frac{a\pi}{D},$$

D étant un discriminant positif fondamental.

En réunissant des termes égaux, on peut écrire le second membre comme il suit

$$-2\sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{a}\right)\log\sin\frac{a\pi}{D}.$$

4. Nous parviendrons à la somme de la série $P(D)$ d'une manière plus élémentaire, de la sorte que la formule (α) de Gauss n'est plus indispensable. Mais nous voulons d'abord ramener la détermination du nombre des classes d'un discriminant général à celle dans le cas d'un discriminant fondamental. On peut ramener d'une manière plus générale la quantité $P(DS^2)$ à la quantité $P(D)$.

Je reprends pour ce but la formule établie plus haut

$$P(DS^2)=\lim_{m=\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{DS^2}{h}\right)\frac{E\left(\frac{m}{h}\right)}{m},$$

et j'emploie l'équation (2), à savoir

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{S^2}{h}\right)f(h)=\sum_{d}\mu(d)\sum_{h=1}^{\infty}f(hd),$$

(d parcourant tous les diviseurs de S).

J'y fais

$$f(h)=\left(\frac{D}{h}\right)\frac{E\left(\frac{m}{h}\right)}{m},$$

et j'aurai d'abord

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{DS^2}{h}\right)\frac{E\left(\frac{m}{h}\right)}{h}=\sum_{d}\mu(d)\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{D}{hd}\right)\frac{E\left(\frac{m}{hd}\right)}{m}$$

$$=\sum_{d}\mu(d)\left(\frac{D}{d}\right)\frac{1}{d}\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{E\left(\frac{m'}{h}\right)}{m'},\qquad\left(m'=\frac{m}{d}\right),$$

puis en passant à la limite pour m infini,

$$P(DS^2) = \sum_d \mu(d)\left(\frac{D}{d}\right)\frac{1}{d}P(D),$$

d parcourant tous les diviseurs du nombre S.

Cela étant, représentons par s tous les facteurs premiers différents de S, on aura évidemment

$$\sum_d \mu(d)\left(\frac{D}{d}\right)\frac{1}{d} = \prod_s\left(1 - \left(\frac{D}{s}\right)\frac{1}{s}\right) \tag{10}$$

et puis la formule cherchée

$$P(DS^2) = P(D)\prod_s\left(1 - \left(\frac{D}{s}\right)\frac{1}{s}\right), \tag{11}$$

où s parcourt les facteurs premiers différents du nombre S. Les formules (3^*) et (4^*) permettent alors de conclure

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta S^2}}Cl(-\Delta S^2) = 2P(-\Delta S^2),$$

$$\frac{1}{\sqrt{DS^2}}Cl(DS^2)\log E(DS^2) = P(DS^2)$$

et par conséquent

$$\frac{Cl(-\Delta S^2)}{Cl(-\Delta)} = \frac{2}{\tau}S\prod_s\left(1 - \left(\frac{-\Delta}{s}\right)\frac{1}{s}\right), \tag{12}$$

$$\frac{Cl(DS^2)\log E(DS^2)}{Cl(D)\log E(D)} = S\prod_s\left(1 - \left(\frac{D}{s}\right)\frac{1}{s}\right). \tag{13}$$

Il s'ensuit que la détermination des nombres $Cl(D_0Q^2)$ et $Cl(-\Delta_0Q^2)$ revient à celle des nombres $Cl(D_0)$ et $Cl(-\Delta_0)$ qui correspondent aux discriminants fondamentaux.

Nous allons maintenant considérer la série $P(D)$ correspondante à un discriminant fondamental. Son évaluation s'obtient au moyen des développements suivants

$$(\beta) \qquad \frac{1}{2} - x = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sin 2hx\pi}{h\pi},$$

$$(\gamma) \qquad -\log \sin x\pi = \log 2 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\cos 2hx\pi}{h}$$

qui ont lieu sous la condition $0 < x < 1$ et qui ne sont que des conséquences de la série logarithmique.

Soit $-\Delta$ un discriminant négatif fondamental et posons, dans l'équation (β), $x = \frac{\nu}{\Delta}$, multiplions de part et d'autre par le signe de LEGENDRE $\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)$ et ajoutons les résultats pour $\nu = 1, 2, \ldots, \Delta - 1$. Il vient

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{\Delta}\right) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h\pi} \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \sin \frac{2h\nu\pi}{\Delta},$$

ou, si l'on fait usage des relations

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \sin \frac{2h\nu\pi}{\Delta} = \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\sqrt{\Delta}:$$

$$-\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\nu}{\Delta} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{\sqrt{\Delta}}{h\pi} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} P(-\Delta).$$

La dernière quantité étant, suivant (3^*), égale à

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta),$$

on a l'équation connue

$$(14) \qquad Cl(-\Delta) = -\frac{\tau}{2\Delta} \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu.$$

En opérant d'une manière analogue sur l'équation (γ) on trouve l'équation

$$(9^*) \qquad Cl(D) \log E(D) = -\sum_{\nu=1}^{D-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) \log \sin \frac{\nu\pi}{D}$$

qui a été obtenue plus haut.

5. De ces résultats de DIRICHLET nous allons exposer une généralisation laquelle nous paraît de présenter un certain intérêt théorique.

Dans l'identité analytique

$$-\log(1-z) = \sum_1^\infty \frac{z^n}{n}, \qquad |z| < 1,$$

remplaçons z par la quantité

$$ze^{2\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\dots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)},$$

en représentant par $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r$ les valeurs absolues des discriminants fondamentaux de signes quelconques $D_1, D_2, \dots, D_r$, puis après avoir multiplié les deux membres par le signe

$$\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\cdots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)$$

ajoutons les résultats qu'on obtient en faisant varier l'indice h_1 de 1 à $\Delta_1 - 1$, h_2 de 1 à $\Delta_2 - 1$, et ainsi de suite.

La somme suivante qui est le coefficient de $\frac{z^n}{n}$ au second membre

$$\sum_{h_1}\sum_{h_2}\cdots\sum_{h_r}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\cdots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)e^{2n\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\dots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)}$$

est évidemment égale au produit des sommes simples

$$\sum_{h_1}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)e^{\frac{2nh_1\pi i}{\Delta_1}}\sum_{h_2}\left(\frac{D_2}{h_2}\right)e^{\frac{2nh_2\pi i}{\Delta_2}}\cdots\sum_{h_r}\left(\frac{D_r}{h_r}\right)e^{\frac{2nh_r\pi i}{\Delta_r}},$$

ou bien en faisant usage de la formule connue, au produit des quantités

$$\left(\frac{D_1}{n}\right)\sqrt{D_1}\left(\frac{D_2}{n}\right)\sqrt{D_2}\cdots\left(\frac{D_r}{n}\right)\sqrt{D_r} = \left(\frac{D_1D_2\dots D_r}{n}\right)\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\cdots\sqrt{D_r};$$

les racines carrées $\sqrt{D_a}$ sont ou bien positives (si $D_a > 0$) ou bien imaginaires positives (si $D_a < 0$).

En posant pour un moment

$$\Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \ldots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right) = x, \qquad (0 < x < 1),$$

on a évidemment

$$e^{2\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \ldots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right)} = e^{2x\pi i},$$

et puisque, grâce à la condition $0 < x < 1$,

$$\log(1 - e^{2x\pi i}) = \log(2 \sin x\pi) + \left(x - \frac{1}{2}\right)\pi i,$$

on aura

$$\log\left(1 - e^{2\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \ldots\right)}\right)$$

$$= \log\left|2 \sin \pi\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \ldots\right)\right| + \pi i \Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \ldots\right) - \frac{\pi i}{2}.$$

Donc en passant à la limite pour $z = 1$ dans l'équation (15) il vient

$$(\delta) \quad \begin{cases} \sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\ldots\sqrt{D_r}\,P(D) \\ = -\sum_{(h)}{}' \left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\ldots\left(\frac{D_r}{h_r}\right) \log\left|\sin \pi\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \ldots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right)\right| \\ \quad - \pi i \sum_{(h)} \left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\ldots\left(\frac{D_r}{h_r}\right) \Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \ldots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right) \end{cases}$$

où les conditions sommatoires sont

$$0 < h_1 < \Delta_1, \quad 0 < h_2 < \Delta_2, \quad \ldots, \quad 0 < h_r < \Delta_r$$

et où l'on convient de suprimer les termes infinis.

Distinguons maintenant les deux cas $D > 0$ et $D < 0$.

Pour D négatif et égal à $-\Delta$ le nombre des termes négatifs dans la suite $D_1, D_2, \ldots, D_r$ sera impair $2\nu + 1$, et il vient

$$\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\ldots\sqrt{D_r} = (-1)^\nu i\sqrt{\Delta}.$$

Si donc, dans l'équation (δ), on compare les parties imaginaires des deux membres, il vient

$$(-1)^\nu\sqrt{\Delta}\,P(-\Delta) = -\pi \sum_{(h)} \left(\frac{D_1}{h_1}\right)\ldots\left(\frac{D_r}{h_r}\right) \Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \ldots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right).$$

Puisque ici $\Delta > 4$, on a $\tau = 2$ et l'équation (3^*) donne

$$P(-\Delta) = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} Cl(-\Delta),$$

et par conséquent, notre résultat devient

$$(-1)^{\nu+1} Cl(-\Delta) = \sum_{(h)} \left(\frac{D_1}{h_1}\right) \cdots \left(\frac{D_r}{h_r}\right) \Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \cdots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right),$$

ou bien

(16) $$Cl(D_1 D_2 \ldots D_r) = (-)^{\nu+1} \sum_{h_1=1}^{\Delta_1-1} \left(\frac{D_1}{h_1}\right) \sum_{h_2=1}^{\Delta_2-1} \left(\frac{D_2}{h_2}\right) \cdots \sum_{h_r=1}^{\Delta_r-1} \left(\frac{D_r}{h_r}\right) \Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right)$$

($D_1, D_2, \ldots, D_r$ désignant des discriminants fondamentaux dont $2\nu + 1$ sont négatifs, puis $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ leurs valeurs absolues correspondantes).

Supposons en second lieu que D est positif; alors parmi les facteurs $D_1, D_2, \ldots, D_r$ il y en aura un nombre pair 2ν qui soient négatifs, et le produit $\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\ldots\sqrt{D_r}$ sera exactement $(-1)^\nu\sqrt{D}$. En comparant les parties réelles dans l'équation (δ), on aura donc

$$(-1)^\nu \sqrt{D} P(D) = -\sum_{(h)}{}' \left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right) \cdots \log\left|\sin\pi\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots\right)\right|$$

et puisque

$$\sqrt{D} P(D) = Cl(D) \log E(D),$$

il vient

(17) $$Cl(D_1 D_2 \ldots D_r) \log E(D_1 D_2 \ldots D_r) = (-1)^{\nu+1} \sum_{h_1, h_2, \ldots, h_r}{}' \left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right) \cdots \left(\frac{D_r}{h_r}\right) \log\left|\sin\pi\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right)\right|$$

($D_1, D_2, \ldots, D_r$ désignants des discriminants fondamentaux dont 2ν sont négatifs, puis $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ leurs valeurs absolues; les conditions sommatoires étant

$$0 < h_1 < \Delta_1, \quad 0 < h_2 < \Delta_2, \quad \ldots, \quad 0 < h_r < \Delta_r$$

avec supression des termes infinies ou absurdes).

Ces formules généralisent évidemment les résultats (14) et (9^*); en effet, si $r = 1$, $D = -\Delta < -4$, on aura $\Re\left(\frac{h}{\Delta}\right) = \frac{h}{\Delta}$ et l'équation (16) se réduit à (14), puisque $\nu = 0$.

On peut transformer la formule (16) en sorte que la fonction numérique $\Re(x)$ se trouve remplacée par la fonction de LEGENDRE $E(x)$; cette transformation suppose cependant que le nombre r des facteurs D_a surpasse l'unité. On a en effet, par définition,

$$\Re\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)$$
$$=\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)-E\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right),$$

et puis, grâce à l'hypothèse de $r>1$,

$$\sum_{(h)}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\ldots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)=0;$$

la formule (16) devient alors

(16*) $$Cl(D_1D_2\ldots D_r)$$
$$=(-1)^\nu\sum_{h_1=1}^{\Delta_1-1}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\sum_{h_2=1}^{\Delta_2-1}\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\ldots\sum_{h_r=1}^{\Delta_r-1}\left(\frac{D_r}{h_r}\right)E\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right),$$

en supposant comme plus haut que $2\nu+1$ signifie le nombre des termes négatifs de la suite $D_1, D_2, \ldots, D_r$; $r>1$.

Nous parviendrons plus tard à des formules équivalentes et nous développerons les conséquences qu'on en peut tirer, mais à présent je veux considérer l'équation (17) pour montrer qu'elle permet de simplifier l'équation de DIRICHLET (9*) en cas où le discriminant D est un nombre pair.

Si D est un discriminant pair, positif et fondamental, il ne peut avoir que l'une des trois formes suivantes

$$D=4\Delta,\qquad D=8\Delta,\qquad D=8D_1,$$

où $-\Delta$ et D_1 sont des discriminants fondamentaux impairs, le premier négatif, le second positif. Dans le premier cas on a $D_1=-\Delta$, $D_2=-4$, donc $r=2$, $\nu=1$, et la formule (17) devient

$$Cl(4\Delta)\log E(4\Delta)$$
$$=\sum_{h_1=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h_1}\right)\left\{\log\left|\sin\pi\left(\frac{h_1}{\Delta}+\frac{1}{4}\right)\right|-\log\left|\sin\pi\left(\frac{h_1}{\Delta}+\frac{3}{4}\right)\right|\right\}$$

en suprimant toutefois les valeurs de h_1 qui rendraient entier le nombre $\frac{h_1}{\Delta}+\frac{1}{2}$; or de telles valeurs de h_1 ne se présentent pas et l'on a comme la valeur du second membre

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\left|\frac{\sin\pi\left(\frac{h}{\Delta}+\frac{1}{4}\right)}{\sin\pi\left(\frac{h}{\Delta}+\frac{3}{4}\right)}\right|,$$

et en faisant usage de l'identité

$$\frac{\sin\pi\left(\frac{1}{4}+\xi\right)}{\sin\pi\left(\frac{3}{4}+\xi\right)}=\operatorname{tg}\pi\left(\frac{1}{4}+\xi\right)=\frac{1+\operatorname{tg}\xi\pi}{1-\operatorname{tg}\xi\pi},$$

il vient

$$(18)\qquad Cl(4\Delta)\log E(4\Delta)=\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta}}{1-\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta}}\right|.$$

Les termes du second membre coïncident deux à deux et on peut l'écrire aussi

$$2\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta}}{1-\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta}}\right|.$$

On trouve en poursuivant la voie analogue les deux autres formules que je me borne à indiquer

$$(19)\qquad Cl(8\Delta)\log E(8\Delta)=\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\left|\frac{\operatorname{tg}\pi\left(\frac{1}{8}+\frac{h}{\Delta}\right)}{\operatorname{tg}\pi\left(\frac{1}{8}-\frac{h}{\Delta}\right)}\right|,$$

$$(20)\qquad Cl(8D)\log E(8D)=-\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\log\left|\operatorname{tg}\pi\left(\frac{1}{8}+\frac{h}{D}\right)\operatorname{tg}\pi\left(\frac{1}{8}-\frac{h}{D}\right)\right|.$$

6. La formule (14), à savoir

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = -\frac{1}{\Delta} \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu,$$

peut être transformée en expressions plus simples qui se prètent mieux aux applications. Je suppose en premier lieu Δ impair $2n+1$; la somme

$$S = \sum_{\nu=1}^{2n} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu$$

qui figure au second membre de la dite formule peut se décomposer comme il suit

$$S = \sum_{1}^{n} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu + \sum_{1}^{n} \left(\frac{-\Delta}{n+\nu}\right)(n+\nu).$$

Or, Δ étant impair, on a

$$\left(\frac{-\Delta}{n+\nu}\right) = \left(\frac{2}{\Delta}\right)\left(\frac{-\Delta}{2n+2\nu}\right) = \left(\frac{2}{\Delta}\right)\left(\frac{-\Delta}{2\nu-1}\right),$$

et en faisant $2\nu - 1 = \lambda$, il vient

$$S = \sum_{1}^{n} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu + \left(\frac{2}{\Delta}\right) \sum_{\lambda} \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right) \frac{\Delta+\lambda}{2}. \qquad (\lambda = 1, 3, 5, \ldots, 2n-1)$$

La première partie du second membre peut s'écrire

$$\left(\frac{2}{\Delta}\right) \sum \left(\frac{-\Delta}{2\nu}\right) \frac{2\nu}{2},$$

et on aura en décomposant la seconde partie en deux sommes

$$S = \left(\frac{2}{\Delta}\right) \frac{1}{2} \left\{ \sum \left(\frac{-\Delta}{2\nu}\right) 2\nu + \sum \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\lambda \right\} + \left(\frac{2}{\Delta}\right) \frac{\Delta}{2} \sum_{\lambda} \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right).$$

Or l'expression entre parenthèses $\{\ \}$ n'est autre chose que la somme

$$\sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) h = S,$$

et on a la relation

$$\left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) S = \Delta \left(\frac{2}{\Delta}\right) \sum_{\lambda} \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right),$$

et il reste, après réduction,

$$S = -2n \sum_{\lambda} \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right), \qquad (\lambda = 1, 3, \ldots, 2n-1)$$

ce que l'on peut écrire, en introduisant de termes nuls,

$$S = -2n \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right).$$

En remplaçant par S sa valeur $-\Delta \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta)$, il vient

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = 2\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta);$$

mais c'est précisément l'équation (22) pour Δ pair, puisque dans ce cas $\left(\frac{2}{\Delta}\right) = 0$.

L'équation (22) est donc générale, et si l'on observe que la formule (12) donne pour $S = 2$

$$Cl(-4\Delta) = \frac{2}{\tau}\left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) Cl(-\Delta),$$

on a l'équation équivalente

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = Cl(-4\Delta). \tag{22*}$$

C'est donc le nombre des classes de formes positives et primitives

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

qui appartiennent au *déterminant* $-\Delta = b^2 - ac$.

On parvient à une forme différente si, dans la somme S, on transforme les termes où $\nu > \frac{1}{2}\Delta$ en y faisant $\nu = \Delta - \mu$; il vient alors

$$S = \sum_{\nu} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu + \sum \left(\frac{-\Delta}{\Delta - \mu}\right)(\Delta - \mu), \qquad \left(\begin{matrix}\mu < \frac{\Delta}{2} \\ \nu < \frac{\Delta}{2}\end{matrix}\right),$$

En repartissant les valeurs de ν en paires 2μ et impaires λ, et posant dans les termes correspondants à ces dernières $\lambda = \Delta - 2\rho$, on aura

$$0 < \mu < \frac{1}{4}\Delta, \qquad \frac{1}{4}\Delta < \rho < \frac{1}{2}\Delta$$

et la somme s devient

$$s = \sum \left(\frac{-\Delta}{2\mu}\right) - \sum \left(\frac{-\Delta}{2\rho}\right) = \left(\frac{2}{\Delta}\right)\left[\sum \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) - \sum \left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\right].$$

Il s'ensuit

$$\sum \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) - \sum \left(\frac{-\Delta}{\rho}\right) = \left(\frac{2}{\Delta}\right) s$$

et on a évidemment

$$\sum \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) + \sum \left(\frac{-\Delta}{\rho}\right) = s,$$

d'où

$$\sum \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) = \frac{1 + \left(\frac{2}{\Delta}\right)}{2} s,$$

$$\sum \left(\frac{-\Delta}{\rho}\right) = \frac{1 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)}{2} s.$$

En substituant la valeur de s il vient

$$\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) = \frac{\left(1 + \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)}{2} Cl(-\Delta),$$

$$\sum_{\mu=\left[\frac{\Delta}{4}\right]+1}^{\left[\frac{\Delta}{2}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) = \frac{\left(1 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)}{2} Cl(-\Delta),$$

aussi dans les cas où les discriminants — Δ et D ne sont plus fondamentaux. Ces sommes se déterminent aisément au moyen de l'identité (2)

$$(\alpha) \qquad \sum_1^{\infty}\left(\frac{Q^2}{h}\right)f(h) = \sum_d \mu(d)\sum_{h=1}^{\infty} f(dh),$$

d parcourant les diviseurs de Q.

Soit en effet $\Delta = \Delta_0 Q^2$, où $-\Delta_0$ est un discriminant fondamental; en faisant, dans la formule (α),

$$f(h) = \left(\frac{-\Delta_0}{h}\right)h \quad \text{pour} \quad h \leqq \Delta, \quad \text{et} \quad f(h) = 0 \quad \text{pour} \quad h > \Delta,$$

elle devient

$$\sum_1^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta_0 Q^2}{h}\right)h = \sum_d \mu(d)\sum_{h=1}^{\frac{\Delta}{d}}\left(\frac{-\Delta_0}{hd}\right)hd,$$

ou bien

$$(\beta) \qquad \sum_1^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)h = \sum \mu(d)\left(\frac{-\Delta_0}{d}\right)d\sum_{h=1}^{\Delta_0\frac{Q^2}{d}}\left(\frac{-\Delta_0}{h}\right)h.$$

Cela étant, l'expression

$$A = \sum_{h=1}^{\Delta_0 m}\left(\frac{-\Delta_0}{h}\right)h$$

se détermine en faisant $h = \rho + \Delta_0\nu$ ($\rho = 1, 2, \ldots, \Delta_0$, $\nu = 0, 1, \ldots, m-1$); on aura

$$A = \sum_{\rho=1}^{\Delta_0-1}\left(\frac{-\Delta_0}{\rho}\right)\sum_{\nu=0}^{m-1}(\rho + \Delta_0\nu) = m\sum_1^{\Delta_0-1}\left(\frac{-\Delta_0}{\rho}\right)\rho;$$

or, $-\Delta_0$ étant un discriminant fondamental, on peut appliquer la formule (14) qui donne

$$A = -m\Delta_0\frac{2}{\tau_0}Cl(-\Delta_0)$$

ou bien

$$(27) \qquad \sum_{h=1}^{m\Delta_0}\left(\frac{-\Delta_0}{h}\right)h = -m\Delta_0\frac{2}{\tau_0}Cl(-\Delta_0).$$

Pour évaluer la somme

$$B = \sum_{1}^{mD_0-1} \left(\frac{D_0}{h}\right) \log \sin \frac{h\pi}{mD_0}$$

on pose $h = \rho + D_0 \nu$ ($\rho = 1, 2, \ldots, D_0$; $\nu = 0, 1, \ldots, m-1$), et il vient

$$B = \sum_{\rho=1}^{D_0-1} \left(\frac{D_0}{\rho}\right) \sum_{\nu=0}^{m-1} \log \sin \pi\left(\frac{\rho}{mD_0} + \frac{\nu}{m}\right);$$

la sommation relative à ν s'effectuera au moyen de l'identité

$$\sum_{a=0}^{m-1} \log \left| 2 \sin \pi\left(x + \frac{a}{m}\right) \right| = \log | 2 \sin mx\pi |$$

qui donne

$$B = \sum_{\rho=1}^{D_0-1} \left(\frac{D_0}{\rho}\right) \log \sin \frac{\rho\pi}{D_0}$$

ou bien

$$\sum_{1}^{mD_0-1} \left(\frac{D_0}{h}\right) \log \left| \sin \frac{h\pi}{mD_0} \right| = - Cl(D_0) \log E(D_0).$$

Au moyen de cette formule le résultat obtenu plus haut devient

$$\sum_{1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \log \sin \frac{h\pi}{D} = - Cl(D_0) \log E(D_0) \sum_{d} \mu(d) \left(\frac{D_0}{d}\right)$$

ou bien

$$(29) \qquad - \sum_{h=1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \log \sin \frac{h\pi}{D} = Cl(D_0) \log E(D_0) \prod_{q} \left(1 - \left(\frac{D_0}{q}\right)\right)$$

($D = D_0 Q^2$, D_0 étant un discriminant fondamental et q parcourant le facteurs premiers différents de Q).

CHAPITRE II.

1. Les considérations suivantes basent sur la relation bien connue

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\nu^2\omega\pi i+2\nu u\pi i} = \sqrt{\frac{i}{\omega}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\omega}(u+\nu)^2}$$

que j'écrirai encore une fois en prenant $\omega = ix$, $x > 0$:

$$(1) \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\nu^2 x\pi+2\nu u\pi i} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{x}(u+\nu)^2}.$$

Cela posé, soit D un discriminant fondamental positif; dans l'équation (1) je pose $u = \frac{h}{D}$ et après avoir multiplié les deux membres par le signe de LEGENDRE $\left(\frac{D}{h}\right)$ j'ajoute les résultats pour $h = 1, 2, \ldots, D-1$. On reçoit de la sorte au premier membre l'expression

$$\sqrt{D} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{-\nu^2 x\pi},$$

et pour simplifier le résultat qui se présente au second membre, il faudra introduire un nouvel indice sommatoire $n = h + D\nu$; on obtient ainsi l'équation

$$\sqrt{D} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{-\nu^2 x\pi} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{n^2\pi}{D^2 x}}.$$

Elle prendra une forme plus élégante en remplaçant x par $\frac{x}{D}$ et en réunissant des termes égaux, à savoir

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{n^2 x\pi}{D}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{n^2\pi}{Dx}}.$$

Si au contraire on opère d'une manière analogue pour un discriminant fondamental négatif, on n'obtient aucun résultat, les deux membres de

l'équation obtenue étant nuls. Mais en prenant la dérivée des deux membres de l'identité (1) par rapport à u, on parvient à l'équation

$$2\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu e^{-\nu^2 x\pi}\sin 2\nu u\pi = \frac{1}{x\sqrt{x}}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}(u+\nu)e^{-\frac{\pi}{x}(u+\nu)^2}.$$

En prenant, pour un discriminant fondamental négatif $-\Delta$, $u=\frac{h}{\Delta}$ et en ajoutant, après avoir multipliées les deux membres par le signe de LEGENDRE $\left(\frac{-\Delta}{h}\right)$, il vient

$$2\sqrt{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu e^{-\nu^2 x\pi} = \frac{1}{x\sqrt{x}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{n\,.\,\mathrm{sgn}\,n}{\Delta}e^{-\frac{n^2\pi}{\Delta^2 x}},$$

ou bien, si l'on change x en $\frac{x}{\Delta}$ et simplifiant,

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)ne^{-\frac{n^2 x\pi}{\Delta}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)ne^{-\frac{n^2\pi}{\Delta x}}.$$

Occupons-nous d'abord de cette dernière équation. Elle fait voir que la fonction suivante

$$F=\int_z^{\infty}dx\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)ne^{-\frac{n^2 x\pi}{\Delta}}+\int_0^z\frac{dx}{x\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)ne^{-\frac{n^2\pi}{\Delta x}}$$

ne dépende pas de la variable z supposée positive. Pour z infiniment petit la seconde intégrale disparaît et il ne reste que la première, à savoir

$$\frac{\Delta}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{n}e^{-\frac{n^2 z\pi}{\Delta}}$$

qui, pour $z=0$, se réduit à la quantité

$$F=\sqrt{\Delta}\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta).$$

En employant cette valeur de G et les formules faciles à obtenir

$$\int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} e^{-\frac{n^2 x\pi}{D}} = \frac{2\sqrt{D}}{n\sqrt{\pi}} \int_{n\sqrt{\frac{\pi z}{D}}}^\infty e^{-x^2} dx,$$

$$\int_0^z \frac{dx}{x} e^{-\frac{n^2\pi}{Dx}} = \int_{\frac{n^2\pi}{Dz}}^\infty e^{-x} \frac{dx}{x},$$

on aura le développement à convergeance rapide

$$(5) \qquad Cl(D) \log E(D) = \frac{2\sqrt{D}}{\sqrt{\pi}} \sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \int_{n\sqrt{\frac{z\pi}{D}}}^\infty e^{-x^2} dx + \sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right) \int_{\frac{n^2\pi}{Dz}}^\infty e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Le nombre de termes qu'il faut calculer est encore plus petit que dans le cas précédent, à cause de la présence du facteur $\log E(D)$ au premier membre, dont la valeur paraît, d'après l'expérience, être comparable à $\sqrt{D}$. La valeur de z qu'on peut recommander est $z = 1$.

Ecrivons maintenant, pour abréger et d'une manière provisoire,

$$Cl(D) \log E(D) = A, \qquad \frac{n^2\pi}{D} = c, \qquad \left(\frac{D}{n}\right) = \varepsilon;$$

l'équation (5) s'écrira alors

$$A = \sum \varepsilon \int_1^\infty e^{-czx} \sqrt{z} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \sum \varepsilon \int_1^\infty e^{-\frac{cx}{z}} \frac{dx}{x}.$$

Soit maintenant u une constante positive, multiplions les deux memb par $e^{-uz} \frac{dz}{\sqrt{z}}$ et intégrons de $z = 0$ à $z = \infty$; on aura

$$A\sqrt{\frac{\pi}{u}} = \sum \varepsilon \int_1^\infty \frac{1}{cx + u} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \sum \varepsilon \int_1^\infty \frac{dx}{x} \int_0^\infty e^{-\frac{cx}{z} - uz} \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

L'avantage de cette formule n'est pas trop grand, la convergeance de la première série étant trop lente. Il s'ensuit que lorsque w surpasse une certaine limite, la quantité

$$\frac{2\sqrt{D}}{\pi \log E(D)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{w}{n}$$

a sa partie entière constante qui est égale à $Cl(D) - 1$.

2. Une source de relations arithmétiques consiste dans la représentation analytique de certaines fonctions arithmétiques. En particulier la fonction $E(x)$ de LEGENDRE a été représentée à l'aide d'une série trigonométrique par SCHAAR[1] et STERN;[2] ce dernier en a tiré plusieures conséquences arithmétiques. RIEMANN et dans son comentaire M. DEDEKIND[3] ont rencontré cette fonction, avec d'autres analogues, dans un domaine analytique important; les applications les plus intéressantes ont cependant été publiées par M. ALEXANDER BERGER.[4]

Au lieu de la fonction $E(x)$ nous introduisons la fonction $E^*(x)$, égale à $E(x)$ pour x fractionnaire, mais égale à $E(x) - \frac{1}{2}$ pour x entier; sous cette convention, la formule suivante aura lieu pour tous les x positifs

$$E^*(x) = x - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi}. \tag{7}$$

Elle aura lieu aussi pour x négatif, si l'on a soin de choisir sa définition de la sorte que

$$E^*(x) + E^*(-x) = -1.$$

Une autre fonction est

$$R(x) = x - E\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

---

[1] Mémoires des sav. étr. publiés par l'académie des Sciences de Belgique, T. 23.

[2] Journal de Crelle, T. 59.

[3] Riemann's Werke: *Fragmente aus d. Th. der ellipt. Modulfunctionen.*

[4] Nova Acta reg. Soc. sc. Upsaliensis, 1886.

puis nous multiplierons par le signe de LEGENDRE $\left(\frac{D}{h}\right)$ et ajouterons les résultats pour $h = 1, 2, \ldots, D-1$. En faisant usage de la formule

$$\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\cos\frac{2\nu h\pi}{D} = \left(\frac{D}{\nu}\right)\sqrt{D}$$

nous parviendrons de cette manière aux équations suivantes:

$$(11)\qquad \sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)E^*\left(x+\frac{mh}{D}\right) = \left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$(12)\qquad \sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)R^*\left(x+\frac{mh}{D}\right) = -\left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$(13)\qquad \sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\text{sgn.}\,R^*\left(x+\frac{mh}{D}\right) = 4\left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\sum_{\lambda}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\frac{\sin 2\lambda x\pi}{\lambda\pi},$$

$$(14)\qquad \sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\left|R\left(x+\frac{mh}{D}\right)\right| = -2\left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\sum_{\lambda}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\frac{\cos 2\lambda x\pi}{\lambda^2\pi^2},$$

$$(\lambda = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots).$$

En opérant de la même manière au moyen d'un discriminant fondamental négatif, les résultats seront semblables, seulement dans la première formule la quantité

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{mh}{\Delta}$$

ne sera plus nulle, mais aura pour valeur

$$-\frac{2m}{\tau}Cl(-\Delta);$$

nous aurons ainsi les équations:

$$(15)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)E^*\left(x+\frac{mh}{\Delta}\right)$$

$$= -\frac{2m}{\tau}Cl(-\Delta) + \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

ce qui est évidemment égal à

$$\frac{1}{2}Cl(-4\Delta)-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\Delta}\right)\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta).$$

En substituant la valeur

$$Cl(-4\Delta)=\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta),$$

la dernière expression devient

$$\left(1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta);$$

c'est donc la valeur de la série

$$\sqrt{\Delta}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu\pi},$$

Si donc on pose dans les équations (16) et (17) $x=0$, $m=1$, on aura d'abord

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)R^*\left(\frac{h}{\Delta}\right)=\left(1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta),$$

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\text{sgn.}\,R^*\left(\frac{h}{\Delta}\right)=2Cl(-4\Delta);$$

dans ces sommes je conserve la première moitié de termes, et dans la seconde je pose $h=\Delta-k$; on aura alors

$$\left(\frac{-\Delta}{h}\right)R^*\left(\frac{h}{\Delta}\right)=\left(\frac{-\Delta}{k}\right)R^*\left(\frac{k}{\Delta}\right),$$

et de même pour la seconde somme; puisque enfin pour $h<\frac{1}{2}\Delta$ on a $R^*\left(\frac{h}{\Delta}\right)=\frac{h}{\Delta}$, $\text{sgn.}\,R^*\left(\frac{h}{\Delta}\right)=1$, il vient

$$\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}J\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}=\frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}Cl(-\Delta),$$

$$\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}J\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)=Cl(-4\Delta),$$

résultats que nous avons vérifiés plus haut.

Les formules (11) et (15) sont les plus importantes.

Je m'arrêterai encore aux formules (14) et (18). En faisant $x=0$, $m=1$ dans la première, on trouve

$$\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D}=-\sqrt{D}\sum_{\lambda}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda^2\pi^2}$$

ce qu'on peut écrire

$$(19)\qquad \sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D}=-\left(1-\left(\frac{2}{D}\right)\frac{1}{4}\right)\sqrt{D}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^2\pi^2}.$$

La série qui figure au second membre est une de celles qui s'expriment sous forme finie au moyen des polynômes de Bernoulli; pour le vérifier rapidement, je me rappelle l'équation qui a lieu pour $0\leqq x\leqq 1$

$$(20)\qquad x^2-x+\frac{1}{6}=\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu^2\pi^2},$$

en y faisant $x=\frac{h}{D}$, multipliant par $\left(\frac{D}{h}\right)$ et ajoutant, on obtient

$$(21)\qquad \sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h^2}{D^2}=\sqrt{D}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^2\pi^2}$$

d'où en comparant avec (19) on tire cette relation remarquable

$$(22)\qquad \sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h^2=-\frac{4D}{4-\left(\frac{2}{D}\right)}\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right)h.$$

Passons maintenant à (18); en y faisant $x=\frac{1}{4}$, $m=1$, et en observant que

$$\sin\frac{\lambda\pi}{2}=\left(\frac{-4}{\lambda}\right),\qquad \left(\frac{-4}{\lambda}\right)\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)=\left(\frac{4\Delta}{\lambda}\right)$$

nous aurons

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|R\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right)\right|=\sqrt{4\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{4\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^2\pi^2}.$$

Si Δ est impair, 4Δ sera un discriminant positif fondamental et on pourra appliquer l'équation (21) pour $D=4\Delta$; il vient

$$\sqrt{4\Delta}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{4\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^2\pi^2}=\sum_{1}^{4\Delta-1}\left(\frac{4\Delta}{h}\right)\frac{h^2}{(4\Delta)^2},$$

d'où il suit (pour Δ impair)

$$\sum_{h=1}^{4\Delta-1}\left(\frac{4\Delta}{h}\right)h^2=16\Delta^2\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|R\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right)\right|, \tag{23}$$

et si l'on fait usage de (22)

$$\sum_{h=1}^{2\Delta-1}\left(\frac{4\Delta}{h}\right)h=-4\Delta\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|R\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right)\right|. \tag{23*}$$

Or, la somme qui figure au second membre

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|R\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right)\right|$$

est évidemment

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right)+\sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{3}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{h}{\Delta}\right)+\sum_{\left[\frac{3}{4}\Delta\right]+1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{h}{\Delta}-\frac{3}{4}\right)$$

ce qui peut s'écrire, en réunissant des termes égaux,

$$2\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}-2\sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}.$$

la différence

$$S_k - S_{k-1} = \sum_{a=1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) \left[E\left(\frac{k+a}{D}\right) - E\left(\frac{k+a-1}{D}\right) \right]$$

se compose de termes qui sont nuls, excepté le cas où $\frac{k+a}{D}$ est un entier, ce qui ne se présente que pour $a = D - k$; donc

$$S_k - S_{k-1} = \left(\frac{D}{D-k}\right) = \left(\frac{D}{k}\right);$$

en observant que

$$S_0 = 0,$$

on en déduit l'équation annoncée

$$S_k = \sum_{\nu=1}^{k} \left(\frac{D}{\nu}\right)$$

qui par là se trouve démontrée.

Cela posé, observons que la quantité

$$\left(\frac{D}{a}\right) E^*\left(x + \frac{a}{D}\right)$$

coïncide avec l'expression

$$\left(\frac{D}{a}\right) E\left(x + \frac{a}{D}\right),$$

excepté le cas où $x + \frac{a}{D}$ est un entier; cela ne se présente que lorsque Dx est un entier qui satisfait à la congruence

$$Dx \equiv -a \pmod{D};$$

la différence entre les deux expressions sera alors égale à

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{D}{a}\right)$$

et on pourra l'écrire

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{D}{Dx}\right).$$

Je poserai maintenant d'une manière générale, pour un discriminant fondamental positif ou négatif D, et pour $x \geqq 0$,

$$\text{(III)} \qquad S(x, D) = \sum_{a=1}^{[\Delta x]} \left(\frac{D}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{D}{\Delta x}\right),$$

Δ désignant la valeur absolue de D. La fonction $S(x, D)$ sera alors identique avec les séries (I), resp. (II).

Comme première application de ces formules je vais calculer l'intégrale

$$\int_0^1 S^2(x, -\Delta)dx = J$$

d'abord au moyen de la formule (II), puis directement pour en conclure une relation arithmétique intéressante. On a évidemment

$$J = \left(\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta)\right)^2 + \frac{\Delta}{\pi^2} \int_0^1 \left(\sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}\right)^2 dx$$

ou en effectuant les intégrations

$$J = \left(\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta)\right)^2 + \frac{\Delta}{2\pi^2} \sum_1^\infty \left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right) \frac{1}{\nu^2}.$$

Or on a

$$\sum_1^\infty \left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right) \frac{1}{\nu^2} = \prod_d \left(1 - \frac{1}{d^2}\right) \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2},$$

d parcourant les facteurs premiers différents du nombre Δ; en faisant usage de la valeur

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

on a donc

$$J = \left(\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta)\right)^2 + \frac{\Delta}{12} \prod_d \left(1 - \frac{1}{d^2}\right).$$

Au moyen des développements (I) et (II) on vérifie aisément les formules suivantes, dans les quelles m signifie un entier positif arbitraire

$$\sum_{a=0}^{m-1} S\left(\frac{x+a}{m}, D\right) = \left(\frac{D}{m}\right) S(x, D), \qquad (D > 0), \tag{27}$$

$$\sum_{a=0}^{m-1} S\left(\frac{x+a}{m}, -\Delta\right) \tag{28}$$

$$= \left(m - \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\right) \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) + \left(\frac{-\Delta}{m}\right) S(x, -\Delta).$$

puis la relation suivante qui a lieu pour $0 < x < 1$

$$S(x) = -S(1-x) \operatorname{sgn.} D \qquad (D > 0 \quad \text{ou} \quad D < 0). \tag{29}$$

Occupons-nous spécialement de la formule (28) en faisant usage en même temps de la relation (29) qui pour $D = -\Delta$ devient

$$S(x) = S(1-x).$$

En prenant $m = 2$, $x = 0$, la formule (28) reproduit l'équation bien connue

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = S\left(\frac{1}{2}, -\Delta\right).$$

Pour $m = 3$, $x = 0$ il vient de (28)

$$S\left(\frac{1}{3}, -\Delta\right) = S\left(\frac{2}{3}, -\Delta\right) = \frac{3 - \left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{\tau} Cl(-\Delta); \tag{30}$$

en supposant $\Delta > 3$ pour qu'on ait $\left(\frac{-\Delta}{\frac{1}{3}\Delta}\right) = 0$, on peut écrire

$$\sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{3}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) = \frac{3 - \left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{\tau} Cl(-\Delta), \qquad (\Delta > 3). \tag{30*}$$

Faisant $m = 2$, $\frac{1}{2}x = \frac{1}{12}$, il vient

$$S\left(\frac{1}{12}\right) + S\left(\frac{7}{12}\right) = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) + \left(\frac{2}{\Delta}\right) S\left(\frac{1}{6}\right)$$

et en substituant la valeur précédente,

$$(33) \qquad S\left(\frac{1}{12}, -\Delta\right) + S\left(\frac{5}{12}, -\Delta\right)$$

$$= \frac{4 - \left(\frac{2}{\Delta}\right) + \left(\frac{4}{\Delta}\right) + \left(\frac{-\Delta}{6}\right) - \left(\frac{-\Delta}{12}\right)}{\tau} Cl(-\Delta).$$

On trouve d'une manière analogue

$$(34) \qquad S\left(\frac{1}{8}, -\Delta\right) + S\left(\frac{3}{8}, -\Delta\right) = \frac{4 - \left(\frac{2}{\Delta}\right) + \left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau} Cl(-\Delta),$$

$$(35) \qquad S\left(\frac{1}{10}, -\Delta\right) + S\left(\frac{2}{5}, -\Delta\right)$$

$$= \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) + \left(\frac{2}{\Delta}\right) S\left(\frac{1}{5}, -\Delta\right).$$

De l'autre côté, l'hypothèse $x = 0$, $m = 5$ donne

$$(36) \qquad S\left(\frac{1}{5}, -\Delta\right) + S\left(\frac{2}{5}, -\Delta\right) = \frac{5 - \left(\frac{-\Delta}{5}\right)}{\tau} Cl(-\Delta).$$

Si donc $\left(\frac{2}{\Delta}\right) = -1$, c'est à dire pour $\Delta = 8k + 3$, on déduit de ces deux dernières équations

$$(37) \qquad S\left(\frac{1}{10}, -10\right) = \frac{1 + \left(\frac{-\Delta}{5}\right)}{2} Cl(-\Delta), \qquad (\Delta \equiv 3 \pmod 8).$$

Mais beaucoup d'autres applications sont possibles des formules fondametales (I) et (II)

$$(a) \qquad S(x\,.\,D) = \sqrt{D} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$(b) \qquad S(x, -\Delta) = \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) - \sqrt{\Delta} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi}.$$

Prenons, par exemple, dans la première équation $x + \frac{am}{\Delta}$ au lieu de x, multiplions de part et d'autre par $\left(\frac{-\Delta}{a}\right)$ et ajoutons pour $a = 1, 2, \ldots, \Delta - 1$; $-\Delta$ signifie, bien entendu, un discriminant négatif fondamental et m un entier positif arbitraire. On aura

$$\sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) S\left(x + \frac{am}{\Delta}, D\right) = \sqrt{D} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{1}{\nu\pi} \sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) \cos 2\nu\pi\left(x + \frac{am}{\Delta}\right).$$

Le second membre étant évidemment égale à la série

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right) \sqrt{D\Delta} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-D\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

on pourra l'écrire, d'après (b), sous la forme

$$-\left(\frac{-\Delta}{m}\right) S(x, -\Delta D) + \left(\frac{-\Delta}{m}\right) Cl(-\Delta D),$$

et nous aurons, par conséquent, la formule suivante

$$(38) \qquad \sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) S\left(x + \frac{am}{\Delta}, D\right) = \left(\frac{-\Delta}{m}\right) Cl(-\Delta D) - \left(\frac{-\Delta}{m}\right) S(x, -\Delta D),$$

et on trouve d'une manière analogue

$$(39) \qquad \sum_{a=1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) S\left(x + \frac{am}{D}, -\Delta\right) = -\left(\frac{D}{m}\right) Cl(-\Delta D) + \left(\frac{D}{m}\right) S(x, -\Delta D).$$

Ces formules ont lieu, si le produit $-\Delta D$ est un discriminant fondamental, de sorte que les entiers Δ et D sont premiers entre eux. Mais il est important de remarquer que ces relations subsisteront aussi dans le cas général où $-\Delta D$ n'est plus fondamental, si l'on convient de définir la fonction $S(x)$ comme la somme de la série (a) ou (b); dans ce cas la signification primitive de la fonction $S(x, -\Delta D)$ comme la somme (III), à savoir

$$\sum_{1}^{[\Delta Dx]} \left(\frac{-\Delta D}{a}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{-\Delta D}{\Delta D x}\right),$$

est la seule chose qui va changer.

En particulier la formule $S(0, -\Delta D) = 0$ subsistera et les équations (38) et (39) donnent les relations suivantes

(38°) $$\sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) S\left(\frac{am}{\Delta}, D\right) = \left(\frac{-\Delta}{m}\right) Cl(-\Delta D),$$

(39°) $$\sum_{a=1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) S\left(\frac{am}{D}, -\Delta\right) = -\left(\frac{D}{m}\right) Cl(-\Delta D),$$

qui ont lieu pour des discriminants fondamentaux quelconques $D > 0$, $-\Delta < 0$.

Soit maintenant D' un discriminant positif fondamental, premier avec D, on vérifie aisément l'équation

(40) $$\sum_{a=1}^{|D'|-1} \left(\frac{D'}{a}\right) S\left(x + \frac{am}{|D'|}, D\right) = \left(\frac{D'}{m}\right) S(x, DD')$$

qui, sous la forme écrite, subsiste aussi lorsque D et D' signifient deux discriminants fondamentaux négatifs, premiers entre eux; la lettre m signifie un entier positif arbitraire.

Dans les formules (38°) et (39°) supposons $m = 1$ et observons que grâce aux relations

$$S(1 - x, -\Delta) = S(x, -\Delta), \qquad S(1 - x, D) = -S(x, D)$$

les termes sont égaux deux à deux; nous aurons au premier membre de la première évidemment

$$2 \sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) S\left(\frac{a}{\Delta}, D\right).$$

Observons ensuite que les symboles

$$\left(\frac{D}{\frac{aD}{\Delta}}\right), \quad \left(\frac{-\Delta}{\frac{a\Delta}{D}}\right)$$

disparaîtront de la formule; en effet, si par exemple $\frac{aD}{\Delta} = k$ est un entier celui-ci ne pourra être premier avec D que lorsque Δ est un multiple

de D; si c'est le cas, on devra avoir $\alpha = k\frac{\Delta}{D}$, le nombre α aura un facteur commun avec Δ et il s'ensuit

$$\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = 0;$$

alors, les termes correspondants ne se présentent pas dans l'équation.

On pourra donc mettre nos résultats (38°) et (39°) sous la forme

$$\text{(A)} \qquad \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\alpha D}{\Delta}\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-\Delta D),$$

$$\text{(B)} \qquad \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{\alpha}\right) \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\alpha\Delta}{D}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -\frac{1}{2} Cl(-\Delta D).$$

Dans ces deux relations sont condensées plusieurs formules spéciales, dont quelquesunes proviennent de DIRICHLET.

Occupons-nous d'abord de la formule (B). En y prenant $D = 5$, il vient

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{5}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) - \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{2}{5}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -\frac{1}{2} Cl(-5\Delta),$$

ou bien, en réduisant,

$$\text{(41)} \qquad \sum_{\nu=\left[\frac{1}{5}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{2}{5}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-5\Delta).$$

L'hypothèse de $D = 8$ fournit la formule connue de DIRICHLET

$$\text{(42)} \qquad \sum_{\nu=\left[\frac{1}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-8\Delta),$$

et aussi en faisant $D = 12$ on parvient à une formule remarquable

$$\text{(43)} \qquad \sum_{\nu=\left[\frac{1}{12}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{5}{12}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-12\Delta).$$

On peut combiner cette équation avec l'autre

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)Cl(-\Delta),\qquad \Delta>4;$$

en retranchant, il vient en effet

$$\frac{1}{2}Cl(-12\Delta)=\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)Cl(-\Delta)-\sum_{1}^{\left[\frac{1}{12}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)-\sum_{\left[\frac{5\Delta}{12}\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right),$$

où les deux sommes ne contiennent que peu de termes. Pour calculer p. ex. $Cl(-12.19)$ on observe que $Cl(-19)=1$, $\left(\frac{2}{\Delta}\right)=-1$, et il vient

$$\frac{1}{2}Cl(-12.19)=3-\left\{\left(\frac{-\Delta}{1}\right)+\left(\frac{-\Delta}{8}\right)+\left(\frac{-\Delta}{9}\right)\right\}=3-(1-1+1)$$
$$=2,$$

donc

$$Cl(-228)=4.$$

Revenons sur la formule (A). En faisant $\Delta=3$, elle donne

(44) $$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{3}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)=\frac{1}{2}Cl(-3D),$$

puis l'hypothèse de $\Delta=4$ donne la formule connue de Dirichlet

(45) $$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)=\frac{1}{2}Cl(-4D),$$

on a ensuite

(46) $$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{7}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)-\sum_{\left[\frac{2}{7}D\right]+1}^{\left[\frac{3}{7}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)=\frac{1}{2}Cl(-7D);$$

si enfin on fait $\Delta = 8$, on a d'abord

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) + \sum_{1}^{\left[\frac{3}{8}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-8D),$$

et si l'on retranche l'expression

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = 0,$$

il vient

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{8}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) - \sum_{\left[\frac{3}{8}D\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-8D), \tag{47}$$

équation également due à DIRICHLET.

Les résultats (A) et (B) qui au fond sont identiques puisqu'on peut passer de l'un à l'autre par le changement de l'ordre de l'addition, contiennent beaucoup d'autres cas particuliers mais qui se compliquent autant que les discriminants augmentent; je noterai encore le cas de $D = 24$ qui donne d'abord

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{24}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) + \sum_{1}^{\left[\frac{5}{24}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) - \sum_{1}^{\left[\frac{7}{24}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) - \sum_{1}^{\left[\frac{11}{24}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)$$
$$= -\frac{1}{2} Cl(-24\Delta)$$

ou bien, en réduisant,

$$\sum_{\left[\frac{1}{24}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{5}{24}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) + 2 \sum_{\left[\frac{5}{24}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{7}{24}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) + \sum_{\left[\frac{7}{24}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{11}{24}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-24\Delta).$$

Si l'on connaît déjà $Cl(-\Delta)$, on pourra employer les identités

$$\sum_{1}^{\left[\frac{5}{24}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)-\sum_{\left[\frac{5}{24}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right),$$

$$\sum_{1}^{\left[\frac{7}{24}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\sum_{1}^{\left[\frac{1}{3}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)-\sum_{\left[\frac{7}{24}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{3}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right),$$

$$\sum_{1}^{\left[\frac{11}{24}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)-\sum_{\left[\frac{11}{24}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right);$$

les sommes qui figurent en seconde place des deuxièmes membres contiennent chacune au surplus $\frac{1}{12}\Delta$ termes, celles qui occupent la première place sont respectivement [voir (30*) et (31*)], en supposant $\Delta > 4$,

$$\frac{2+\left(\frac{2}{\Delta}\right)-\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{2}Cl(-\Delta), \qquad \frac{3-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{2}Cl(-\Delta),$$

$$\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)Cl(-\Delta).$$

On aura donc

$$\frac{1}{2}Cl(-24\Delta)=\frac{5-3\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{4}{\Delta}\right)-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{2}Cl(-\Delta)$$
$$-s\left(1\ldots\frac{1}{24}\right)+s\left(\frac{5}{24}\ldots\frac{1}{4}\right)-s\left(\frac{7}{24}\ldots\frac{1}{3}\right)-s\left(\frac{11}{24}\ldots\frac{1}{2}\right)$$

en posant pour abréger

$$\sum_{a\Delta\leqq\nu\leqq b\Delta}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=s(a\ldots b).$$

On ramène donc la détermination de $Cl(-24\Delta)$ à celle de $Cl(-$ au calcul de $\frac{1}{6}\Delta$ signes de LEGENDRE.

Pour établir les formules précédentes, c'est l'élégance qui nous a aidé; mais les formules (A) et (B) peuvent être utiles mêmes dans des cas plus compliqués, si le discriminant donné est le produit de deux facteurs pas trop différents. Prenons par exemple le discriminant $-559 = (-43).13$. J'emploie alors la formule (B) en y prenant $D = 13$, $\Delta = 43$; en écrivant simplement $(x \ldots y)$ pour représenter la somme

$$\sum_{x \leqq \nu \leqq y} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right),$$

on trouve immédiatement, en décomposant et réunissant d'une manière convenable,

$$\frac{1}{2} Cl(-13\Delta) = \left(\frac{\Delta}{13} \ldots \frac{2\Delta}{13}\right) + \left(\frac{3\Delta}{13} \ldots \frac{4\Delta}{13}\right)$$
$$+ 2\left(\frac{4\Delta}{13} \ldots \frac{5\Delta}{13}\right) + \left(\frac{5\Delta}{13} \ldots \frac{6\Delta}{13}\right);$$

dans notre cas $\Delta = 43$ on a

$$\left(\frac{\Delta}{13} \ldots \frac{2\Delta}{13}\right) = (4 \ldots 6) = 1 - 1 + 1 = 1,$$
$$\left(\frac{3\Delta}{13} \ldots \frac{4\Delta}{13}\right) = (10 \ldots 13) = 1 + 1 - 1 + 1 = 2,$$
$$\left(\frac{4\Delta}{13} \ldots \frac{5\Delta}{13}\right) = (14 \ldots 16) = 1 + 1 + 1 = 3,$$
$$\left(\frac{5\Delta}{13} \ldots \frac{6\Delta}{13}\right) = (17 \ldots 19) = 1 - 1 - 1 = -1.$$

Il s'ensuit

$$\frac{1}{2} Cl(-559) = 1 + 2 + 2.3 - 1 = 8$$

ou bien $Cl(-559) = 16$.

Nous étions obligé de calculer treize symboles de Legendre $\left(\frac{-43}{\nu}\right)$; si nous voudrions faire la recherche directe de formes réduites, nous devrions chercher les décompositions des nombres

$$\frac{559 + \lambda^2}{4} \qquad (\lambda = 1, 3, 5, \ldots, 13$$

à savoir 140, 142, 146, 152. 160, 170, 182, en facteurs ac tels que $\lambda \leq a \leq c$. On aurait obtenu les formes réduites suivantes

$$(1, 1, 140), (2, \pm 1, 70), (4, \pm 1, 35), (5, \pm 1, 28), (7, \pm 1, 20),$$
$$(10, \pm 1, 14), (8, \pm 7, 19), (10, \pm 9, 16), (13, 13, 14).$$

On voit que la détermination des formes réduites est plus laborieuse.

Prenons comme second exemple $D = 21$, $\Delta = 59$; en faisant usage de (B), on a d'abord d'une manière générale

$$-\frac{1}{2}Cl(-21\Delta) = \left(1 \ldots \frac{\Delta}{21}\right) - \left(1 \ldots \frac{2\Delta}{21}\right) + \left(1 \ldots \frac{4\Delta}{21}\right)$$
$$+ \left(1 \ldots \frac{5\Delta}{21}\right) - \left(1 \ldots \frac{8\Delta}{21}\right) - \left(1 \ldots \frac{10\Delta}{21}\right).$$

C'est en décomposant en groupes, une expression de la forme

$$a - (a + b) + (a + b + c) + (a + b + c + d) - (a + b + c + d + e)$$
$$- (a + b + c + d + e + f) = -b - d - 2e - f,$$

où la signification des lettres est évidente; on a donc cette formule générale

$$\frac{1}{2}Cl(-21\Delta) = \left(\frac{\Delta}{21} \ldots \frac{2\Delta}{21}\right) + \left(\frac{4\Delta}{21} \ldots \frac{5\Delta}{21}\right)$$
$$+ 2\left(\frac{5\Delta}{21} \ldots \frac{8\Delta}{21}\right) + \left(\frac{8\Delta}{21} \ldots \frac{10\Delta}{21}\right);$$

dans le cas particulier qui nous occupe, $\Delta = 59$, cette quantité est

$$(3 \ldots 5) + (12 \ldots 14) + 2(15 \ldots 22) + (23 \ldots 28);$$

on devra donc additionner les nombres

$$\left(\frac{-59}{3}\right) = 1, \quad \left(\frac{-59}{4}\right) = 1, \quad \left(\frac{-59}{5}\right) = 1, \quad \left(\frac{-59}{12}\right) = 1, \quad \left(\frac{-59}{13}\right) = -1,$$
$$\left(\frac{-59}{14}\right) = -1; \quad 2\left(\frac{-59}{15}\right) = 2, \quad 2\left(\frac{-59}{16}\right) = 2, \quad 2\left(\frac{-59}{17}\right) = 2,$$
$$2\left(\frac{-59}{18}\right) = -2, \quad 2\left(\frac{-59}{19}\right) = -2, \quad 2\left(\frac{-59}{20}\right) = 2, \quad 2\left(\frac{-59}{21}\right) = 2,$$
$$2\left(\frac{-59}{22}\right) = 2, \quad \left(\frac{-59}{23}\right) = -1, \quad \left(\frac{-59}{24}\right) = -1, \quad \left(\frac{-59}{25}\right) = 1,$$
$$\left(\frac{-59}{26}\right) = \left(\frac{-59}{27}\right) = \left(\frac{-59}{28}\right) = 1.$$

Il vient

$$\frac{1}{2} Cl(-21 \cdot 59) = 12,$$

ou bien

$$Cl(-1159) = 24.$$

Revenons sur les fonctions $S(x, -\Delta)$; la formule

$$S(x, -\Delta) = \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) - \sqrt{\Delta} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x \pi}{\nu \pi}$$

donne pour $x = \frac{1}{2}$,

$$S\left(\frac{1}{2}, -\Delta\right) = \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) + \sqrt{\Delta} \sum_{1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu \pi};$$

la série infinie a pour valeur

$$\left(1 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta)$$

et on a donc, même pour les discriminants non fondamentaux,

$$S\left(\frac{1}{2}, -\Delta\right) = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta);$$

remarquons que, si le discriminant n'est pas fondamental, l'expression finie (III) cesse d'avoir lieu.

Si donc, dans les formules (38) et (39) on fait $x = \frac{1}{2}$, $m = 1$, on aura

$$\sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) S\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{\Delta}, D\right) = -\left(1 - \left(\frac{2}{\Delta D}\right)\right) Cl(-\Delta D),$$

$$\sum_{a=1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) S\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{D}, -\Delta\right) = \left(1 - \left(\frac{2}{\Delta D}\right)\right) Cl(-\Delta D),$$

ou en réduisant aux premiers membres,

$$(48)\qquad \sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) S\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{\Delta}, D\right) = \frac{1-\left(\frac{2}{\Delta D}\right)}{2} Cl(-\Delta D),$$

$$(49)\qquad \sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{a}\right) S\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{D}, -\Delta\right) = \frac{1-\left(\frac{2}{\Delta D}\right)}{2} Cl(-\Delta D).$$

Ces équations ont lieu pour des discriminants fondamentaux quelconques, $D > 0$ et $-\Delta < 0$.

Notons quelques cas particuliers. Pour $\Delta = 3$, on tire de (48):

$$(50)\qquad S\left(\frac{1}{6}, D\right) = \frac{1+\left(\frac{2}{D}\right)}{2} Cl(-3D)$$

ou bien

$$(50^1)\qquad \sum_{1}^{\left[\frac{1}{6}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1+\left(\frac{2}{D}\right)}{2} Cl(-3D),$$

et en retranchant de (44)

$$(50^2)\qquad \sum_{\left[\frac{1}{6}D\right]+1}^{\left[\frac{1}{3}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{D}\right) Cl(-3D).$$

Posant $\Delta = 7$, on a une formule déjà compliquée

$$S\left(\frac{5}{14}, D\right) + S\left(\frac{3}{14}, D\right) - S\left(\frac{1}{14}, D\right) = \frac{1-\left(\frac{2}{D}\right)}{2} Cl(-7D).$$

En retranchant, membre à membre, les formules (30*) et (31*), il vient, pour $\Delta > 4$,

$$(51)\qquad \sum_{a=\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{3}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) = \frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)+\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{2} Cl(-\Delta);$$

cette formule peut s'appliquer, si une au moins des équations suivantes n'a pas lieu: $1 = \left(\frac{-\Delta}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{\Delta}\right) = \left(\frac{4}{\Delta}\right)$; donc si Δ est impair, il ne doit pas avoir la forme $24k - 1$; on devra déterminer à peu près $\frac{\Delta}{12}$ signes $\left(\frac{-\Delta}{a}\right)$.

En combinant les différentes formules que nous avons établies, on parvient à exprimer les sommes

$$\sum_{1}^{\left[\frac{m}{n}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right), \quad \sum_{1}^{\left[\frac{m}{n}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right)$$

par certains nombres des classes. J'abandonne ce sujet et je me borne à indiquer comment les formules générales établies jusqu'ici pourront servir au calcul du nombre des classes, si le discriminant (négatif) est le produit de trois discriminants fondamentaux premiers entre eux et dont la valeur absolue ne dépasse pas 100. C'est par exemple le discriminant

$$-35931 = 21 \cdot 29(-59).$$

En faisant

$$D = 21, \qquad \Delta = 29 \cdot 59 = 1711,$$

on peut employer la formule (B) qui donne comme nous l'avons vu plus haut

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Cl(-21 \cdot \Delta) &= -S\left(\frac{1}{21}, -\Delta\right) + S\left(\frac{2}{21}, -\Delta\right) - S\left(\frac{4}{21}, -\Delta\right) \\ &\quad - S\left(\frac{5}{21}, -\Delta\right) + S\left(\frac{8}{21}, -\Delta\right) + S\left(\frac{10}{21}, -\Delta\right) \\ &= -\sum_{a} \left(\frac{21}{a}\right) S\left(\frac{a}{21}, -\Delta\right). \qquad (a = 1, 2, 4, 5, 8, 10) \end{aligned}$$

En faisant usage de la formule (39) dans le cas de $\Delta = D_1 \Delta_1$ où $D_1 = 29$, $\Delta_1 = 59$, elle donne (en faisant $m = 1$),

$$S\left(\frac{a}{21}, -\Delta\right) = Cl(-\Delta) + \sum_{b=1}^{28} \left(\frac{29}{b}\right) S\left(\frac{a}{21} + \frac{b}{29}, -59\right)$$

et en substituant ces valeurs dans la formule précédente, la constante $Cl(-\Delta)$ disparaîtra et il y resteront les termes

$$\left(\frac{29}{b}\right) S\left(\frac{a}{21}+\frac{b}{29}, -\Delta_1\right), \qquad (\Delta_1 = 59).$$

Pour les former, on se sert des relations

$$S(x+1) = S(x), \qquad S(1-x) = S(x),$$

et on remarque qu'en prenant $b = 29 - b_1$, on aura des termes analogues, ce qui donne l'expression définitive ($\Delta_1 = 59$)

$$\frac{1}{2} Cl(-21 \cdot 29 \cdot 59)$$

$$= -\sum_a \left(\frac{21}{a}\right) \sum_b \left(\frac{29}{b}\right) \left[S\left(\frac{a}{21}+\frac{b}{29}, -\Delta_1\right) + S\left(\frac{a}{21}-\frac{b}{29}, -\Delta_1\right) \right]$$

$$(a = 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10;\ b = 1, 2, 3, \ldots, 14)$$

en convenant de représenter par $S(x, -\Delta_1)$ la quantité $S(1+x, -\Delta_1)$ même si x est négatif.

Cela posé, les quantités $S\left(\frac{a}{21} \pm \frac{b}{29}\right)$ s'expriment aisément par les sommes

$$s_k = \sum_{\nu=1}^{k} \left(\frac{-59}{\nu}\right). \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, 29)$$

On se construit à cet effet un tableau à double entrée des valeurs $\frac{59a}{21} \pm \frac{59b}{29}$, en mettant ensemble les valeurs réduites qui correspondent aux deux signes, et en ajoutant en même temps le signe de Legendre $-\left(\frac{21}{a}\right)\left(\frac{29}{b}\right)$. On aura ainsi un tableau rectangulaire dont les éléments sont des quantités de la forme $\pm(s_h + s_k)$, et pour obtenir la formule définitive, on devra grouper ensemble les quantités égales $\pm s_h$ ce qui donne une expression de la forme

$$\frac{1}{2} Cl(-21 \cdot 29 \cdot 59) = \sum_{h=1}^{29} c_h s_h,$$

qui s'évalue aisément. On aura donc, en résumé, à dresser un tableau à 6×14 cases pour énumérer les c_h et à évaluer au surplus les signes de LEGENDRE $\left(\frac{-59}{h}\right)$ depuis $h = 1$ jusqu'à $h = 29$.

4. Reprenons l'équation (15) en y supposant $m = 1$:

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) + \sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) E^*\left(x + \frac{a}{\Delta}\right) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}.$$

Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle s'annulant à l'infini positif, $f'(x)$ sa dérivée. Certaines conditions qui assurent la convergence étant supposées satisfaites, multiplions les deux membres par $f'(x)dx$ et intégrons de zéro à l'infini. On a

$$\int_0^\infty f'(x)dx = -f(0), \qquad \int_0^\infty f'(x) E^*\left(x + \frac{a}{\Delta}\right)dx = -\sum_{n=1}^{\infty} f\left(n - \frac{a}{\Delta}\right),$$

d'où en faisant $n\Delta - a = m$,

$$\sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) \int_0^\infty E^*\left(x + \frac{a}{\Delta}\right) f'(x)dx = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) f\left(\frac{m}{\Delta}\right).$$

Ensuite, l'intégration par parties permet de transformer l'intégrale

$$\int_0^\infty f'(x) \cos 2\nu x\pi dx$$

en l'expression

$$-f(0) + 2\nu\pi \int_0^\infty f(x) \sin 2\nu x\pi dx.$$

En faisant usage de ces valeurs, nous aurons la formule

$$-\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) f(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) f\left(\frac{m}{\Delta}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \left\{ -\frac{f(0)}{\nu} + 2\pi \int_0^\infty f(x) \sin 2\nu x\pi dx \right\},$$

ou bien

$$(52)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)f\left(\frac{m}{\Delta}\right) = 2\sqrt{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\int_0^{\infty} f(x)\sin 2\nu x\pi\,dx.$$

Si l'on choisit convenablement la fonction $f(x)$, la série

$$\sum_1^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}$$

apparaîtra dans le second membre et on aura un développement de la quantité $Cl(-\Delta)$. Faisons par exemple

$$f(x) = \int_{ax}^{\infty} e^{-z^2}dz,$$

la formule

$$2\nu\pi\int_0^{\infty} f(x)\sin 2\nu x\pi\,dx = f(0) + \int_0^{\infty} f'(x)\cos 2\nu x\pi\,dx$$

donnera

$$2\nu\pi\int_0^{\infty} f(x)\sin 2\nu x\pi\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - a\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}\cos 2\nu x\pi\,dx$$

ou bien

$$2\int_0^{\infty} f(x)\sin 2\nu x\pi\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\nu\pi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\nu\pi}e^{-\frac{\nu^2\pi^2}{a^2}}.$$

Il s'ensuit

$$\sum_1^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\int_{\frac{am}{\Delta}}^{\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\Delta\pi}\sum_1^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{2\nu\pi} - \sqrt{\Delta\pi}\sum_1^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{2\nu\pi}e^{-\frac{\nu^2\pi^2}{a^2}},$$

ou en faisant $a = \sqrt{\frac{\Delta\pi}{u}}$, $u > 0$,

$$(4)\qquad \frac{2}{\pi}Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}e^{-\frac{m^2u\pi}{\Delta}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\int_{m\sqrt{\frac{\pi}{\Delta u}}}^{\infty} e^{-z^2}dz,$$

équation que nous avons obtenue plus haut par un procédé différent.

Prenons en second lieu la formule

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{a}{b}.$$

L'hypothèse de $f(x) = \frac{e^{-ax}}{x}$ n'étant permise puisque la fonction devient infinie pour $x = 0$, j'emploie la formule

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

en la retranchant de la précédente; il vient

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{x}\sin bx\, dx = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}.$$

Faisant donc, dans la formule (52),

$$f(x) = \frac{1 - e^{-ax}}{x}$$

nous aurons

$$\Delta\sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1 - e^{-\frac{am}{\Delta}}}{m} = 2\sqrt{\Delta}\sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\operatorname{arctg}\frac{a}{2\nu\pi},$$

d'où en changeant a en $2u\pi$,

$$(53)\qquad \frac{2}{\tau}Cl(-\Delta) = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\operatorname{arctg}\frac{u}{m} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}e^{-\frac{2mu\pi}{\Delta}}.$$

La formule suivante [1]

$$2\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha\pi}{e^{ux\pi} + \cos\alpha\pi}\sin vx\pi\, dx = \frac{1}{v}\left(\alpha - \frac{\sin\text{hyp}\frac{\alpha v\pi}{u}}{\sin\text{hyp}\frac{v\pi}{u}}\right),$$

$$(0 < \alpha < 1\,,\ u > 0\,,\ v > 0),$$

[1] Reinhard Mildner, *Beitrag zur Ausmittlung des Werthes bestimmter Integrale* (Denkschriften der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. 48; 1884).

conduit à choisir

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sin a\pi}{e^{ux\pi} + \cos a\pi};$$

nous aurons

$$\sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} \frac{\sin a\pi}{e^{\frac{mu\pi}{\Delta}} + \cos a\pi} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu} \left(a - \frac{\sin\operatorname{hyp} \frac{2\nu a\pi}{u}}{\sin\operatorname{hyp} \frac{2\nu\pi}{u}} \right)$$

ou bien

$$(54) \qquad \frac{a\pi}{\tau} Cl(-\Delta)$$

$$= \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} \frac{\sin a\pi}{e^{\frac{mu\pi}{\Delta}} + \cos a\pi} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{\sin\operatorname{hyp} \frac{2am\pi}{u}}{\sin\operatorname{hyp} \frac{2m\pi}{u}},$$

$$(0 < \alpha < 1,\ u > 0).$$

En supposant α infiniment petit, on en déduit $(u > 0)$

$$(54^0) \qquad \frac{1}{\tau} Cl(-\Delta) = \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{e^{\frac{mu\pi}{\Delta}} + 1} + \frac{\sqrt{\Delta}}{u} \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{\sin\operatorname{hyp} \frac{2m\pi}{u}}.$$

et en faisant $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$(54^1) \qquad \frac{\pi}{2\tau} Cl(-\Delta)$$

$$= \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} e^{-\frac{mu\pi}{\Delta}} + \frac{1}{4}\sqrt{\Delta} \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m \cos\operatorname{hyp} \frac{m\pi}{u}};$$

cette dernière formule sera vérifiée plus tard.

En opérant sur la formule (11) pour $m = 1$, à savoir

$$\sum_{a=1}^{D-1} \left(\frac{D}{a}\right) E^*\left(x + \frac{a}{D}\right) = \sqrt{D} \sum_{\nu=1}^\infty \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

d'une manière analogue que nous venons d'opérer sur la formule (15), nous aurons

$$(55)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)f\left(\frac{m}{D}\right) = 2\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\int_{0}^{\infty} f(x)\cos 2\nu x\pi\, dx.$$

D étant un discriminant fondamental positif.

Si l'on y fait par exemple

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{u}}{x},$$

on devra appliquer la formule suivante aisée à vérifier

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\nu x}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{u}\, dx = \frac{\pi}{2}\int_{u\nu}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}$$

qui donne:

$$D\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{m}{Du} = \pi\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\int_{2\nu u\pi}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x};$$

en remplaçant $\operatorname{arctg}\frac{m}{Du}$ par sa valeur

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{Du}{m}$$

on en tire la formule (6).

Prenons en second lieu

$$f(x) = \log\frac{1+e^{-cx}}{1-e^{-cx}},\qquad c > 0,$$

la formule

$$\int_{0}^{\infty}\log\frac{1+e^{-cx}}{1-e^{-cx}}\cos bx\, dx = \frac{\pi}{2b}\,\frac{1-e^{-\frac{b\pi}{c}}}{1+e^{-\frac{b\pi}{c}}}$$

permet de conclure

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\log\frac{1+e^{-\frac{cm}{D}}}{1-e^{-\frac{cm}{D}}} = \frac{1}{2}\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}\,\frac{1-e^{-\frac{2\nu\pi^2}{c}}}{1+e^{-\frac{2\nu\pi^2}{c}}}.$$

Posant $c = u\pi$ et faisant usage des formules

$$\frac{1 - e^{-\frac{2\nu\pi}{u}}}{1 + e^{-\frac{2\nu\pi}{u}}} = 1 - \frac{2}{e^{\frac{2\nu\pi}{u}} + 1},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{\sqrt{D}}{\nu} = Cl(D) \log E(D),$$

nous aurons

$$(56) \quad \frac{1}{2} Cl(D) \log E(D) = \sqrt{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{u}} + 1} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \log \frac{1 + e^{-\frac{mu\pi}{D}}}{1 - e^{-\frac{mu\pi}{D}}},$$

formule qui peut être assez commode pour le calcul effectif du nombre des classes d'un discriminant fondamental positif.

Nous terminons ces recherches en nous rappelant la formule suivante due à KUMMER [1]

$$\int_0^1 \cos^{\beta-1} \frac{x\pi}{2} \cos \gamma x\pi dx = \frac{2^{1-\beta} \Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} + \gamma\right) \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} - \gamma\right)}, \quad (\beta > 0),$$

qui donne l'occasion à une autre application de la formule (15)

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) + \sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) E^*\left(x + \frac{a}{\Delta}\right) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}.$$

Je change, dans cette dernière, x en ux et multipliant les deux membres par $\cos^{\beta-1} \frac{x\pi}{2} dx$ j'intègre de zéro à un. Il vient, d'après la formule de KUMMER

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) \frac{2^{1-\beta} \Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)^2} + \sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) \int_0^1 E\left(ux + \frac{a}{\Delta}\right) \cos^{\beta-1} \frac{x\pi}{2} dx$$

$$= \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} 2^{1-\beta} \Gamma(\beta) \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} + 2\nu u\right) \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} - 2\nu u\right)}.$$

[1] KUMMER, *Sur quelques transformations générales des intégrales définies* (Journal de Crelle, t. 20)

En supposant u positif et inférieur à $\frac{1}{\Delta}$, les fonctions

$$E\left(ux + \frac{\alpha}{\Delta}\right), \qquad (0 < \alpha < \Delta),$$

seront identiquement nulles dans l'intervalle de l'intégration, et il vient

$$\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} + 2\nu u\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} - 2\nu u\right)},$$

ou bien, en posant $\frac{\beta+1}{2} = \xi$, $u = \frac{x}{\Delta}$,

$$(57) \qquad \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu} \frac{\Gamma(\xi)^2}{\Gamma\left(\xi + \frac{2\nu x}{\Delta}\right)\Gamma\left(\xi - \frac{2\nu x}{\Delta}\right)}.$$

Dans cette formule obtenue sous l'hypothèse de $\xi > \frac{1}{2}$, $0 < x < 1$ on peut cependant prendre $\xi = \frac{1}{2}$, puisque cela donne la formule (15) qui se trouve donc généralisée par la formule (55), sous l'hypothèse restrictive bien entendu $0 < x < 1$.

5. Aux résultats obtenus dans le présent chapitre s'ajoute une formule que nous avons tirée d'une source bien différente mais qui leur ressemble beaucoup et que nous allons exposer puisque elle à été le point de départ de nos études.

Soit (a, b, c) une forme quadratique positive à des coefficients réels quelconques, $\Delta = 4ac - b^2$ son discriminant changé de signe, et soit u une quantité également réelle et positive. La formule suivante, cas particulier d'une relation rappelée par KRONECKER à maintes reprises, et dont la démonstration se trouve dans la thèse de M DE SÉGUIER

$$\sum_{m,n} e^{-\frac{2u\pi}{\sqrt{\Delta}}(am^2+bmn+cn^2)} = \frac{1}{u} \sum_{m,n} e^{-\frac{2\pi}{u\sqrt{\Delta}}(am^2+bmn+cn^2)}$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

contient des séries qui ne diffèrent des séries à double entrée employées dans le théorème de Dirichlet que par les termes constants où $m = n = 0$ dont les valeurs sont respectivement 1 et $\frac{1}{u}$. On aura donc, en isolant ces termes et en posant pour abréger

$$f(z) = e^{-\frac{2u\pi z}{\sqrt{\Delta}}} - \frac{1}{u} e^{-\frac{2\pi z}{u\sqrt{\Delta}}},$$

la relation suivante

$$\sum_{m,n}' f(am^2 + bmn + cn^2) = \frac{1}{u} - 1,$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \text{ excepté } m = n = 0).$$

Cela étant, remplaçons la forme (a, b, c) par les différents représentants des formes positives du discriminant fondamental $-\Delta$ et ajoutons les résultats ainsi obtenus; nous aurons

$$\sum_{(a,b,c)} \sum_{m,n}' f(am^2 + bmn + cn^2) = \left(\frac{1}{u} - 1\right) Cl(-\Delta).$$

Or, d'après la formule fondamentale de Dirichlet, le premier membre est égal à la quantité

$$\tau \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) f(hk) = \tau \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{2uhk\pi}{\sqrt{\Delta}}} - \frac{1}{u} e^{-\frac{2hk\pi}{u\sqrt{\Delta}}}\right);$$

en effectuant la sommation relative à k et en comparant les deuxièmes membres, nous aurons la formule cherchée

$$(58) \qquad \left(\frac{1}{u} - 1\right) Cl(-\Delta) = \tau \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{1}{e^{\frac{2hu\pi}{\sqrt{\Delta}}} - 1} - \frac{\tau}{u} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{1}{e^{\frac{2h\pi}{u\sqrt{\Delta}}} - 1}$$

et on en tire en prenant les dérivées des deux membres pour $u = 1$, la formule suivante

$$(59) \qquad Cl(-\Delta) = -\tau \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{1}{e^{\frac{2h\pi}{\sqrt{\Delta}}} - 1} + \frac{4\tau\pi}{\sqrt{\Delta}} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{h}{\left(e^{\frac{h\pi}{\sqrt{\Delta}}} - e^{-\frac{h\pi}{\sqrt{\Delta}}}\right)^2}.$$

(à suivre.)

BIBLIOGRAPHIE.

C. J. Clay and Sons.

Cambridge 1904.

COX, JOHN, Mechanics.

The winning of the principles. Mathematical statement of the principles. Application to various problems. The elements of rigid dynamics. Plates: Archimedes, Galilei, Huyghens, Newton. — XIV+332 p. 8. Sh. 9—.

JEANS, J. H., The dynamical theory of gases.

Law of distribution. Physical properties. Theory of a non-conservative gas. Free path phenomena. Index of subjects & names. — VI+352 p. Royal 8 vo. Sh. 15— (cloth.).

SCOTT, R. F., The theory of determinants and their applications. 2nd ed., revised by G. B. Mathews.

Definitions and notations. Alternate numbres. General properties of determinants. On the minors and on the expansion of a determinant. Composition of arrays. Multiplication of determ. On determ. of compound systems. Arithmetical properties of determ. Elementary factors. Determ. of special forms. Cubic determ., and determ. with multiple suffixes. Determ. of infinite order. Applications to the theory of equations and of elimination. Rational functional determ. Jacobians and Hessians. Appl. to bilinear and quadratic forms. Determ. of functions of the same variable. Continued fractions. Appl. to geometry. — XI+288 p. 8. Sh. 9—.

STOKES, G. G., Mathematical and physical papers. Vol. 4. — VIII+378 p. 8. Sh. 15—.

SYLVESTER, J. J., The collected mathematical papers. Vol. 1 (1837—53). — XII+650 p. 8. Sh. 18—.

THOMSON, J. J., Elements of the mathematical theory of electricity and magnetism. 3 ed. — VI+544 p. 8. Sh. 10— (cloth.).

WALKER, J., The analytical theory of light.

Geometrical propositions of the wave-theory. Analytical expression for a train of plane waves. Interference. Interference produced by isotropic plates. Differential equations of the polarisation-vector. Huygens' principle. Fraunhofer's diffraction phenomena. Fresnel's diffr. phenom. More accurate investigation of the problem of diffr. Reflection & refraction at the surface of isotropic media. Double refraction. Determination of the principal wave-velocities. Crystalline reflect. & refract. The interference of polarised light. The study of polar. light. Absorbing media. Dispersion. Structurally & magnetically active media. — XV+416 p. Royal 8 vo. Sh. 15— (cloth.).

WHITTAKER, E. T., A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies; with an introduction to the problem of three bodies.

Kinematical preliminaries. The equations of motion. Principles available for the integration. Soluble problems of particle dynamics. Dynamical specification of bodies. Soluble problems of rigid dynamics. Theory of vibrations. Nonholonomic systems. Dissipative systems. The principles of HAMILTON and GAUSS. Hamiltonian systems & their integral-invariants. The transformationtheory of dynamics. Properties of the integrals of dynamical systems. Reduction of the problem of three bodies. The theorems of BRUNS and POINCARÉ. The general theory of orbits. Integration by trigonometric series. Index. — XIII+414 p. Royal 8 vo. Sh. 12. 6 d. (cloth.).

Gauthier-Villars.

Paris 1904—05.

BAIRE, R., Leçons sur les fonctions discontinues.

Premières recherches sur les fonctions discontinues. Les ensembles bien ordonnés et les nombres transfinis. Les ensembles linéaires. Les fonctions d'une variable. Les fonctions de n variables. — VIII+127 p. 8. Fr. 3,50.

BOLTZMANN, L., Leçons sur la théorie des gaz. Trad. par A. Galotti et H. Bénard. Avec une introduction et des notes de M. Brillouin. P. 2.

Éléments de la théorie de Van der Waals. Discussion physique de la théorie de Van der Waals. Théorèmes de mécanique générale nécessaires pour la théorie des gaz. Gaz à molécules composées. L'équation de V. d. Waals déduite de la notion de viriel. Théorie de la dissociation. Compléments aux théorèmes relatifs à l'équilibre thermique dans des gaz à molecules complexes. — XII+280 p. 8. Fr. 10—.

BOREL, E., Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes. Réd. par M. Fréchet avec des notes par P. Painlevé et H. Lebesgue.

Notions générales sur les ensembles. Notions sur la continuité. Séries de fonctions réelles. Représentation des fonctions continues par des séries de polynomes. Représ. des fonct. discontinues par des séries de polynomes. Sur le développement des fonctions analytiques (par P. Painlevé). Démonstr. d'un théorème de M. Baire (par H. Lebesgue). Sur l'existence des fonctions de classe quelconque. — VIII + 160. p. 8. Fr. 4,50.

Correspondance d'HERMITE et de STIELTJES. Publ. par les soins de B. Baillaud et H. Bourget. Avec une préface de Émile Picard. T. 1 (8 novembre 1882—22 juillet 1889). — XX + 477 p. 8. Fr. 16—.

DARBOUX, G., Étude sur le développement des méthodes géométriques, lue le 24 septembre 1904 au Congrès des sciences à Saint-Louis. — 34 p. 8. Fr. 1,50.

FOUËT, E. A., Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. P. 2.

Théorèmes d'existence. Étude des fonctions analytiques au point de vue de Cauchy, de Weierstrass, de Riemann. — XI + 299 p. 8. Fr. 10—.

FRENET, F., Recueil d'exercises sur le calcul infinitésimal. 6[e] éd. avec un appendice sur les résidus, les fonctions elliptiques, les équations aux dérivées partielles, les équations aux différentielles totales, par H. Laurent.

Calcul différentiel. Calcul intégral. — XIV + 538 p. 8. Fr. 8—.

GOURSAT, É., Cours d'analyse mathématique. T. 2, fasc. 1.

Fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations. — 304 p. 8. Fr. 20— (prix du t. 2 complet pour les sous-cripteurs).

HUMBERT, M. G., Cours d'analyse professé à l'École Polytechnique. T. 2.

Compléments du calcul intégral. Fonctions analytiques et elliptiques. Équations différentielles. — XVIII + 493 p. 8. Fr. 16—.

LAGUERRE, EDMOND, N., Oeuvres. Publ. sous les auspices de l'Académie des sciences, par Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché. T. 2. Géométrie. — 715 p. 8. Fr. 22—.

LECHALAS, G., Introduction à la géométrie générale. (Actualités scientifiques.)

Géom. à une, à deux, à trois et à quatres dimensions. Géom. des espaces à courbure négatives. — IX + 58 p. 8. Fr. 1,75.

PICARD, É., Traité d'analyse. 2e éd. rev. et corrigée. T. 2, fasc. 1.

Fonctions harmoniques et fonctions analytiques. Introduction à la théorie des équations différentielles. Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann. — 368 p. 8. Fr. 16—.

PICARD, É., Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences. Conférences faites en Amérique.

Trois conférences faites à Clark-University (1899): Sur l'extension de quelques notions mathem. et en particulier de l'idée de fonction depuis un siècle. Quelques vues générales sur la théorie des équations différentielles. Sur la théorie des fonctions analytiques et sur quelques fonctions spéciales. Conférence faite au Congrès de Saint-Louis (1904): Sur le développement de l'analyse mathém. et ses rapports avec quelques autres sciences. — 167 p. 8. Fr. 3,50.

POINCARÉ, H., La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes. La télégraphie sans fil. (Scientia, phys.-mathém. n° 23.) — VI+110 p. 8. Fr. 2— (cart.).

POINCARÉ, H., Leçons de mécanique céleste, professées à la Sorbonne. T. 1: Théorie générale des perturbations planétaires.

Principes de la dynamique. Le probl. des trois corps. Le mouvement elliptique. Principes de la méthode de Lagrange. Application de la méth. de Lagrange. Transformations diverses des développements. Le probl. restreint. Théorie élém. des perturbations séculaires. Théorie complète des perturb. sécul. Cas général du probl. des trois corps. Théorème de Poisson. Symétrie des développements. Solutions périodiques. Principe de la méthode de Delauny — VI+365 p. 8. Fr. .

SÉGUIER, J. A. DE, Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits.

Premières définitions et conséquences immédiates. Diviseurs. Groupes abéliens et hamiltoniens. Groupes d'ordre p^m. Sur les groupes de mouvements. Sur les matrices et les systèmes linéaires. Sur certaines propriétés des g_{p^a}. — II+176 p. 8. Fr. 5—.

VIVANTI, G., Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations. Professées à l'université de Messine. Trad. par A. Boulanger.

Théorie générale des groupes de transformations. Application de la théorie des groupes de transformations aux équations différentielles. Transformations de contact. — VII+296 p. 8. Fr. 8—.

G. J. Göschen.

Leipzig 1904—05.

Bürklen, O. Th., Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik. (Samml. Göschen.)

Arithmetik, Algebra, algebr. Analysis, eb. Geom., Stereom., eb. u. sphär. Trigonom., mathem. Geographie, analyt. Geom. der Ebene u. des Raumes, Differential- u. Integralrechnung. 3 durchgesehene Aufl. — 227 p. 12. M. 0,80 (geb.).

Classen, J., Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Bd 1—2. (Samml. Schubert 41—42.)

1: Elektrostatik und Elektrokinetik. — X+184 p. 8. M. 5— (geb.).
2: Magnetismus und Elektromagnetismus. — IX+251 p. 8. M. 7— (geb.).

Grimsehl, E., Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung. Bd 1. (Samml. Schubert 38.)

Allgemeine Potentialtheorie. Die Gravitation. Elektrostatik. — VII+219 p. 8. M. 6— (geb.).

Liebmann, Heinrich, Nichteuklidische Geometrie. (Samml. Schubert 49.)

Das Parallelenpostulat u. seine Scheinbeweise. Aufbau d. Geom. d. hyperbol. Ebene mit Hilfe d. Kreisgeom. d. euklid. Ebene. Synthetische Geom. d. hyperbol. Ebene. Die Trigonometrie in d. hyperbol. Ebene. Längen- u. Inhaltsmessungen mit Benutzung von Integralen. Analyt. Geom. d. hyperbol. Ebene. Sphärisch-ellipt. Geom. Nichteuklid. Mechanik. Alphabetisches Sachregister. — VIII+248 p. 8. M. 6,50 (geb.).

Runge, C., Theorie und Praxis der Reihen. (Samml. Schubert 32.)

Reihen von konstanten Grössen. Reihen von Funktionen. Die Fourier'schen Reihen. Unendliche Produkte. Reihenentwicklung der Funktionen mit mehr als zwei Veränderlichen. — 266 p. 8. M. 6— (geb.).

Sturm, A., Geschichte der Mathematik. (Samml. Göschen 226.)

Altertum, Mittelalter, Neuzeit. — 152 p. 12. M. 0,80 (geb.).

Voigt, W., Thermodynamik. Bd. 1—2. (Samml. Schubert 39, 48.)

1: Thermometrie, Kalorimetrie, Wärmeleitung. Thermisch-mechanische Umsetzungen. Mit 43 Figuren. — XV+360 p. 8. M. 10— (geb.).
2: Thermisch-chemische Umsetzungen. Thermisch-elektrische Umsetzungen. Mit 44 Figuren u. 1 Kurventafel. — XI+370 p. 8. M. 10— (geb.).

Vries, H. de, Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume. Mit 25 Figuren. — 78 p. 8. M. 3—.

Helwingsche Verlagsbuchhandlung.

Hannover 1905.

KIEPERT, L., Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. T. 1: Differential-Rechnung. 10:te vollst. umgearb. und verm. Aufl. von Dr. Max Stegemann. Mit 181 Figuren im Texte.

Funktionen von einer unabhängigen Veränderlichen. Einige grundlegende Untersuchungen aus der Algebra. Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen. — XX+816 p. 8.

A. Hermann.

Paris 1903—04.

GREEN, GEORGE, Mathematical papers. Ed. by N. M. Ferrers. Fac-simile reprint. — X+336 p. 8.

TANNERY, J., Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. 2° éd. entièrement refondue. T. 1.

Nombres irrationnels. Ensembles. Limites. Séries. Produits infinis. Fonctions élémentaires. Dérivées. — IX+422 p. 8. Fr. 14—.

Fr. Hodgson.

London 1904.

CUNNINGHAM, ALLAN, J. C., Quadratic partitions. — XXIII+266 p. 8. Sh. 12— (cloth.).

Ulrico Hoepli.

Milano 1904.

BRIOSCHI, F., Opere matematiche. Pubbl. per cura del comitato per le onoranze a Francesco Brioschi. T. 3. — X+435 p. 4. L. 25—.

Lehmann & Stage.

Köpenhamn 1904.

LORENZ, L., Oeuvres scientifiques. Rev. et annotées par H. Valentiner. T. II, fasc. 2.

Portrait. Vie et travaux de L.-V. Lorenz. S. le développement des fonctions au moyen d'intégrales définies. Un théorème sur la fonction potentielle. S. l'évaluation des aires. S. le mouvem. permanent d'un liquide. S. la résolution des éq. algébr. au moyen de séries et d'intégrales définies. Contribution à la théorie des nombres. S. la compensation des erreurs d'observation. S. la réduction du facteur eulérien. Éq. cinétiques fondamentales d'un système de points.

S. le développement des fonct. arbitraires au moyen de fonct. données. S. les nombres premiers. Recherches analytiques s. les nombres de nombres premiers. — XXII + 267 p. 8.

The Macmillan Company.

London, New York 1904—05.

CAJORI, F., An introduction to the modern theory of equations.

Some elementary properties of equations. Elementary transformations of eq. Location of the roots of an eq. Approximation to the roots of numerical eq. The algebraic solution of the cubic and quartic. Solution of binomial eq. and reciprocal eq. Symmetric functions of the roots. Elimination. The homographic and the Tschirnhausen transformations. Substitutions. Subsist.-groups. Resolvents of Lagrange. The Galois theory of algebraic numbers. Reducibility. Normal domains Reduction of the Galois resolvent by adjunction. Solution of eq. from standpoint of the Galois theory. Cyclic eq. Abelian eq. Algebraic solut. of eq. — IX + 239 p. 8. Cloth. Sh. 1,75.

CAMPBELL, D. F., The elements of the differential and integral calculus, with numerous examples. — X + 364 p. 8.

GIBSON, G. A., An introduction to the calculus, based on graphical methods.

Differentiation of powers. Maxima and minima. Differentials. Higher derivatives. Applications to mechanics. Further theorems on differentiation. Integration of powers. Areas. Definite integrals. Integral as limit of a sum. Simpson's rules. Appl. to mechanics. Differentiation of direct trigonometric functions. Integration of direct trigonom. funct. Mean values. Fourier series. Inverse circular funct. Logarithmic and exponential funct. Applications. Curvature. Bending of beams. Catenary. Alternate currents. Double integrals. Graphical integration. — XIII + 225 p. 8. Cloth.

JOLY, CH. J., A manual of quaternions.

Addition and subtraction of vectors. Multiplication and division of vectors and quaternions. Formulae and interpretations depending on products of vectors. Applications to plane and spherical trigonometry. Geometry of the straight line and plane. The sphere. Differentiation. Linear and vector functions. Quadric surfaces. Geometry of curves and surfaces. Staties. Finite displacements. Strain. Dynamics of a particle. Dynamics. The operator ∇. Projective geometry. Hyperspace. Index. — XVII + 320 p. 8. Sh. 10— (cloth.).

KELLAND, PH. and TAIT, P. G., Introduction to quaternions. 3 ed., prepared by C. G. Knott.

Vector addition and subtraction. Quaternions & versors or quotients & products of vectors. Quaternion products and related developments. Simple geometrical applications. Cones & their sections. Central surfaces of the second order. Miscellaneous geometrical applications. Dynamical applications. Vector equations of the first degree. — XVII + 208 p. 8.

RIGHI, A., Modern theory of physical phenomena. Radio-Activity, Ions, Electrons. Transl. by A. Trowbridge.

Electrolytic ions and electrons. The electrons and the pheuomena of light. Nature of the cathode rays. The ions in gases and in solids. Radio-activity. Mass, velocity, and electric charge of the ions and of the electrons. The electrons and the constitution of matter. Bibliography. Index. — XIII + 165 p. 8. Sh. 5 — (cloth.).

Swan Sonnenschein & Co.

London 1904.

HINTON, C. H., The fourth dimension. — VIII + 247 p. 8.

B. G. Teubner.

Leipzig 1904.

CESÀRO, E., Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung, mit zahlreichen Übungsbeispielen. Nach einem Manuskript des Verfassers deutsch. hrsg. von Gerhard Kowalewski.

Theorie der Determinanten. Lineare und quadratische Formen. Irrationale Zahlen. Grenzwerthe. Unendl. Reihen u. Produkte. Theorie der Funktionen. Komplexe Zahlen u. Quaternionen. Algebr. Gleichungen. Differentialrechnung. Integralrechnung. Sachregister. — 894 p. 8. M. 15 — (geb.).

WEBSTER, A. G., The dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies. (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Geb. d. math. Wiss., Bd 11.)

Kinematics of a point. Laws of motion. Important particular motions of a material point. General principles. Work and energy. Principle of least action. Generalized equations of motion. Oscillations and cyclic motions. Systems of vectors. Distribution of mass. Instantaneous motion. Dynamics of rotating bodies. Newtonian potential function. Dynamics of deformable bodies. Staties of deformable bodies. Hydrodynamics. List of works consulted by the author. — XI + 588 p. 8. M. 14 — (geb.).

The University of Chicago Press.

Chicago 1904.

BOLZA, O., Lectures on the calculus of variations. (The decennial publications of the university of Chicago. 2nd series. Vol. 14.)

The first and second variation of the integral $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$. Sufficient conditions for an extremum of the same integral. Weierstrass's theory of the problem in parameter-representation. Kneser's theory. Weierstrass's theory of the isoperimetric problems. Hilbert's existence theorem. — XV + 271 p. 8. Sh. 4 — (cloth.).

Vieweg und Sohn.

Braunschweig 1904.

LEJEUNE-DIRICHLET, G., Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen. Herausg. von G. Arendt. Mit in den Text eingedruckten Abbildungen.

Die Lehre von den bestimmten Integralen. Einige Anwendungen der bestimmten Integrale. — XXIII + 476 p. 8. M. 12—.

